НКПС

НОВОСИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ ВОЕННЫХ ИНЖЕНЕРОВ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Доц. САВЕЛОВ А. А.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

ТОМСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО „КРАСНОЕ ЗНАМЯ"
1938

РНБ:

38-4
1759

Савелов, Алексей Александрович
Замечательные кривые. Томск. „Кр. знамя". 1938.
Т. л., 436 стр. с черт., 1 вкл. л. черт. 22 см (Новосиб. ин-т воен. инженеров ж.-д. транспорта) 500 экз. 10 р.
На т. л. автор: доц. Савелов А. А.
Библиогр: „Список основных лит. источников...", стр. 433.

№ 9490 [39-17166] 19.2
Всес. кн. палата 31 V. 39

516+517+[016]
С127

Отв редактор—проф. В. Е. Еврейсков. Техред М. М. Поваров.

Новосиб уполобллита № 2814-1937 г
Подп к печати 14/XI-1938 г.
Объем печ. л.—27, авт л.—27.
Знак. в печ. листе—41360
Заказ № 5504-1937 г.

Сдано в производство 26/XII-1937 г.
Формат бумаги 140×225/32
Бум. л.—13,5
Тираж 500 экз

Типография изд-ва „Красное Знамя". Томск, Советская ул № 47.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В 1-й части настоящей работы проводится систематическое исследование замечательных кривых, выводятся их уравнения в различных системах координат, подробно исследуются особенности их форм, исследуются геометрические и механические свойства этих кривых, вычисляются их элементы, излагаются различные способы их построения, как графические, так и механические, рассматривается применение этих кривых в физике, механике, технике и, наконец, в некоторых случаях даются исторические справки о той или иной кривой

Во 2-ой части приводится общая схема исследования кривой по ее уравнению и, в качестве образцов применения этой схемы, прилагается исследование формы сорока кривых.

Книга может служить учебным пособием для студентов, изучающих аналитическую и дифференциальную геометрию, и быть полезным справочником для преподавателей и инженеров

А Савелов.

ВВЕДЕНИЕ.

В 1637 г. вышла в свет книга, которав совершила крупнейший переворот в истории развитив математики. Это была „Геометрив" Рене Декарта—книга в которой было окончательно оформлено понвтие метода координат в разъвсивлось его примененне к целому рвду геометрических задач

С помощью этого метода многне весьма трудные проблемы, требовавшне длв своего решенив тонких и остроумвых прнемов, решались с большой простотой и всностью

Звачение метода координат определвлось тем, что с помощью его, геометрические задачи переводнлись на взык алгебры и решались путем вычисленив. Сложвые геометрвческие построения древних, сопровождаемые тонкими рассужденивми были заменены алгебранческими операцивми.

Простота, всность и главное общность, которые вносил этот метод в процесс решенив задачи, обеспечили ему господствующее положение в математике вплоть до наших дней

Основанием метода координат ввлветсв чрезвычайно простав идев, согласно которой каждой паре вещественных чисел можно привести в соответствие точку на плоскости и обратно каждой точке, лежащей на плоскости, можно привести в соответствие пару вещественных чвсел.

Из этого положевив непосредственно вытекает другое важное положение согласно которому: каждому уравневю, сввзывающему две переменные величвны соответствует некоторав кривав (вещественнав или мнимав).

Действительно каждому уравненню с двумв переменнымв соответствует бесконечное множество пар чисел, являющихсв значеннвми переменных, удовлетворвющими данному уравненню Но согласно основной идее метода координат каждой паре чисел соответствует на плоскости точка. Следовательно, данному уравненню будет соответствовать бесконечное множество точек, лежащих на плоскости, расположенных тем или иным образом, опреде-

лвемым характером самого уравненнв Короче говорв, данному уравненню будет соответствовать определеннав кривав.

Особенности формы этой кривой и все ее свойства определвютсв особенностями того уравненив, которому соответствует эта кривав. Возникает вопрос какие же особенности кривой соответствуют данным особенностям ее уравненив и обратно. Каким образом, имев уравненне кривой, изучить эту кривую или наоборот, знав характерные особенности кривой, получить ее уравненне.

Разрешеннем этих вопросов занимаютсв аналитическав и диференциальнав геометрин.

Врвд ли нужно говорить о том высоком значенин, которое имеет изученне кривых и в чисто теоретических вопросах математики и во всех ее многочисленных приложенивх.

Роль кривых в области техники огромна. Геометрическне свойства кривых, вскрытые анализом их уравнений, широко используютсв в различных механизмах, деталях машин, всевозможных строительных инструментах и т. д

Эксцентрик, сообщающий стержню равномерное поступательное движенне, очерчиваетсв по спирали Архимеда, так как именно эта кривав обладает свойствами, обеспечивающими равномерность движенив Зубцы шестеренок очерчены по циклическим кривым, так как кривые эти обладают свойствами, позволвющими шестеренкам плавно катитьсв одна по другой, не стирав своих зубцов.

Закругленив железнодорожного пути при больших радиусах кривизны имеют форму кубической параболы, а при малых (например, в горной местности)—форму дуги лемнискаты

В области физики, астрономии и естествознанив на каждом шагу приходитсв иметь дело с кривыми. Здесь они призваны наглвдно иллюстрировать многие законы, характеризующие соотношенне между переменными величинами, измененнем которых определветсв изучаемое вленне природы. Наглвднав иллюстрацив закона в виде некоторой кривой оказываетсв чрезвычайно полезной, ибо она вносит бо́льшую всность в понимание сущности этого закона; часто кривав своим видом, особенностями своей формы подчеркивает некоторые весьма важные детали изучаемого вленив, которые при отсутствии на-

главного представления могли оказаться не заметными

Кривые, как геометрические иллюстрации законов природы, играют до некоторой степени подсобную роль, но часто в работе естествоиспытателя они становятся предметом самостоятельного изучения, непосредственно осуществляясь в некоторых явлениях природы (траектория, орбита).

Наконец, в области чисто теоретических вопросов математики кривые, как геометрические интерпретации изучаемых вопросов, также имеют большое значение. Достаточно вспомнить насколько важным является, при изучении свойств какой-либо функции, иметь соответствующую ей кривую Насколько, например, отвлеченными и трудными были бы вопросы о разрывах функции и о видах этих разрывов, если бы не прибегать к соответствующим геометрическим иллюстрациям!

Классификация кривых. Основные свойства алгебраических кривых

Бесконечному множеству уравнений, связывающих две переменные величины и отнесенных к некоторой системе координат, соответствует бесконечное множество кривых самых разнообразных форм. В силу этого обстоятельства возникает вопрос о классификации этого множества кривых

Так как характерные особенности кривых определяются характерными особенностями их уравнений, то естественно в основу классификации положить подразделение кривых на алгебраические и трансцендентные, соответственно подразделению уравнений на алгебраические и трансцендентные.

Что же касается выбора системы координат, к которой относятся данные уравнения, то наиболее удобной является прямоугольная система по соображениям, о которых будет указано ниже.

Алгебраические кривые.

Алгебраической называется кривая, уравнение которой, после преобразований, заключающихся в освобождении этого уравнения от дробей и радикалов и расположении его членов по нисходящим степеням, принимает вид

$A_0x^n + A_1x^{n-1}y + A_2x^{n-2}y^2 + \ldots + A_ny^n +$	$n+1$ членов
$+B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2}y + B_2x^{n-3}y^2 + \ldots + B_{n-1}y^{n-1} +$	n „
$+C_0x^{n-2} + C_1x^{n-3}y + C_2x^{n-4}y^2 + \ldots + C_{n-2}y^{n-2} +$	$n-1$ „
$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$	
$+K_0x + L_0y +$	2 члена
$+M=0$	1 член

Все алгебранческне кривые подразделены на порядкн, определяемые степенью уравнения данной кривой

Таким образом написанное уравнение определяет алгебраическую кривую „n"-го порядка.

Суммируя числа членов каждого ряда в написанном уравнении, получим

$$(n+1)+n+(n-1)+\ldots+2+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

Таким образом полное уравнение кривой „n"-го порядка содержит $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ членов.

В частных случаях некоторые члены уравнения могут быть нулями.

Остановимся на некоторых основных теоремах, касающихся алгебранческих кривых.

Теорема 1-я: Порядок алгебранческой кривой не зависнт от места положения системы декартовых координат на плоскости.

Действительно, пусть данная кривая имеет в декартовой системе координат уравнение

$$F(x, y)=0$$

Выберем новую систему координат и пусть формулы перехода, выражающие старые координаты через новые, будут

$$x=A\,x_1+B\,y_1+C$$
$$y=A_1\,x_1+B_1\,y_1+C_1$$

Так как правые части этих формул являются линейными выражениями, то после подстановки в уравнение $F(x, y)=0$ они не смогут повысить его степень, но очевидно и не смогут и понизить, так как тогда при обратном переходе от системы $x_1 0_1 y_1$ к системе $x0y$ степень уравнения должна была бы повыснтся, что невозможно, как мы уже видели. Таким образом, теорема доказана

Заметим, что от перенесения системы декартовых координат не изменяется не только порядок алгебраической кривой, но и вообще не изменяется характер уравнения кривой, т. е. алгебраическая кривая всегда останется алгебраической, а трансцендентная—трансцендентной, как бы ни располагали систему координат. Это вытекает из тех же соображений, на основании которых была доказана предыдущая теорема

Совершенно по другому обстоит дело; например, в полярной системе координат. так уравнение окружности с полюсом в начале имеет вид $\rho = a$ и оказывается алгебраическим, если же полюс перенести в некоторую точку (ρ_1, φ_1), то это же уравнение примет вид

$$a^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi_1)$$

и окажется таким образом трансцендентным

В силу этого обстоятельства при классификации кривых уравнения их выгодно отнести именно к системе декартотых координат, а не какой-либо другой.

Теорема 2-я Алгебраическая кривая „n"-го порядка определяется $\frac{n(n+3)}{2}$ точками

Действительно, в уравнении кривой „n"-го порядка присутствует, вообще говоря, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ членов с таким же количеством коэффициентов, для определения которых необходимо иметь систему $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ уравнений.

Но если все члены этого уравнения предварительно разделить на один из коэффициентов, что является вполне законным, если этот коэффициент не равен нулю, то число коэффициентов, подлежащих определению, окажется на единицу меньше, т. е будет равно

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

соответственно этому число необходимых уравнений будет:

$$\frac{n(n+3)}{2}$$

Таким образом, если заданы своими координатами $\frac{n(n+3)}{2}$ точек кривой „n"-го порядка, то, подставляя эти координаты в общее уравнение кривой, мы получим

$\frac{n(n+3)}{2}$ уравнений, из которых и определяются коэффициенты уравнения данной кривой.

Заметим, что при определении коэффициентов некоторые из них могут оказаться равными ∞ или неопределенности $\frac{0}{0}$. Это говорит о том, что коэффициент, на который предварительно делились все члены уравнения, равен нулю и те коэффициенты, которые приняли вид неопределенности $\frac{0}{0}$, также равнялись нулю.

Наконец может быть и так, что все определяемые коэффициенты примут вид неопределенности $\frac{0}{0}$. Это будет говорить за то, что данных точек недостаточно для определения данной кривой.

Последнее обстоятельство может быть в том случае, когда данные $\frac{n(n+3)}{2}$ точек расположены так, что в с я к а я кривая „n"-го порядка проходя через некоторые из них, обязательно должна проходить и через остальные.

Так, например, все кривые 3-го порядка, проходящие через 8 точек, расположенных известным образом, обязательно пройдут через некоторую 9-ю точку, следовательно, такими 9-ю точками кривая 3-го порядка не может быть определена (парадокс Крамера).

Подобно этому кривая 2-го порядка, состоящая из двух пересекающихся прямых, не может быть определена 5-ю точками, если эти точки заданы так, что 4 из них лежат на одной прямой. Задача окажется неопределенной, ибо существует бесконечно много кривых 2-го порядка, состоящих из двух пересекающихся прямых, одна из которых определяется 4-мя данными точками, а другая связана только одним условием прохождения через 5-ю заданную точку

Теорема 3-я. Две алгебраических кривых, из которых одна n-го порядка, а другая m-го, пересекаются не более чем в „mn" точках.

Действительно, по теореме Безу, рассматриваемой в алгебре, известно, что число общих решений двух уравнений с двумя неизвестными равно произведению степеней этих уравнений.

Если среди этих решений будут мнимые, то очевидно действительных точек пересечения данных кривых будет меньше, чем mn

Если уравнения данных кривых неполные, так, например, если в уравнении 1-й кривой высшая степень у-ка есть $n-p$, а в уравнении 2-й кривой $m-q$, то степень уравнения, полученного после исключения у будет не выше $mn-pq$, как это показал Безу, в силу чего кривые будут пересекаться не больше, чем в $mn-pq$ точках

Следствие. кривая n-го порядка пересекается каждой прямой в n точках (действительных или мнимых).

Алгебраические кривые, соответствующие частным видам их уравнений

1 Если уравнение, связывающее x и y не удовлетворяется никакими действительными значениями x и y, то соответствующую ему кривую называют мнимой.

Пример уравнение $x^2+y^2=-9$ выражает мнимую окружность

2 Если уравнение удовлетворяется только одной парой значений x и y, то оно соответствует точке

Пример уравнение $x^2+y^2=0$ выражает точку (0, 0)

3 Если левая часть уравнения $F(x, y)=0$ может быть разложена на множители, например,

$$F(x, y)=f_1(x, y)\,f_2(x, y),$$

то данному уравнению $F(x, y)=0$ соответствует система кривых, определяемых уравнениями

$$f_1(x, y)=0 \quad \text{и} \quad f_2(x, y)=0$$

В частности, если левая часть уравнения является однородной функцией „n"-го измерения, то на основании известного свойства однородных функций, полагая $y=\alpha x$ имеем: $F(x, y)=x^n F(1, \alpha)$, и если $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ — корни уравнения $F(1, \alpha)=0$, то

$$F(x, y)=A(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)\ldots(\alpha-a_n)x^n=$$

$$=A\left(\frac{y}{x}-a_1\right)\left(\frac{y}{x}-a_2\right)\ldots\left(\frac{y}{x}-a_n\right)x^n=$$

$$=A(y-a_1x)(y-a_2x)\ldots(y-a_nx);$$

В силу этого данное уравнение $F(x, y)=0$ можно представить в виде ряда отдельных уравнений.

$$y-a_1x=0;\quad y-a_2x=0.\ldots\ldots y-a_nx=0$$

и, очевидно, при этом, те уравнения, в которых коэффициенты при x окажутся действительными, будут выражать прямые линии

Таким образом уравнение $F(x, y)=0$, в котором $F(x, y)$ —однородная функция n-го измерения, выражает систему „n“ прямых линий, из которых некоторые могут быть мнимыми

4. Если координаты x и y любой точки данной кривой, могут быть выражены рационально в функции некоторого параметра t, то кривую эту называют уникурсальной или однопробежной. При изменении параметра t от $-\infty$ до $+\infty$ переменная точка $M(x, y)$ уникурсальной кривой пробегает без скачков всю кривую.

Таким образом уникурсальная кривая не имеет разрывов и состоит всегда из одной ветви

Примером уникурсальной кривой может служить Декартов лист.

Историческая справка

Изучение кривых велось математиками с глубокой древности Целый ряд замечательных кривых с исчерпывающей полнотой был изучен еще греками

В книгах Аполлония Пергского приводится законченная теория кривых 2-го порядка Такие кривые как циссонда, конхонда, квадратриса и др также были известны грекам и достаточно изучены ими

В 17—18 веках создается теория алгебраических кривых 3 и 4 порядка в работах Ньютона, Эйлера, Крамера и др Ньютон указал 72 вида кривых 3-го порядка. Эйлер, классифицируя их по характеру бесконечных ветвей, свел эти кривые к 16 видам.

По этому же принципу Эйлер классифицировал кривые 4-го порядка, насчитав для них 146 видов

Наиболее замечательными из всех кривых, с которыми приходится встречаться при изучении разнообразных явлений в области техники, физики и естествознания, являются, без сомнения, кривые 2-го порядка—окружность, эллипс, парабола и гипербола.

Они графически выражают целый ряд необычайно важных физических законов, они непосредственно осуществляются во многих явлениях природы (движение планет по эллипсам, траектория брошенного тела в форме параболы и т. д.), наконец, кривые эти обладают весьма ценными геометрическими свойствами, позволяющими использовать их в целом ряде конструкций и механизмов.

Эллипс, гипербола и парабола открыты были древними греками и достаточно подробно изучены ими, как конические сечения Предполагают, что теория конических сечений зародилась в результате разрешения чисто практической задачи архитектурного характера, когда перед греческими архитекторами встал вопрос о том, насколько должен быть вытянут овал, являющийся украшением на фронтоне здания, чтобы с известного места перед зданием он казался кругом

Среди греческих математиков, занимавшихся коническими сечениями, необходимо отметить прежде всего Менехма (—3 в.) Эллипс, гиперболу и параболу греки называли по имени этого математика „триадами Менехма".

Законченную форму теории конических сечений дал Аполлоний Пергский (2-я полов. 3-го в. до н. э) в своем труде, состоящем из 8 книг. Ему же приписывается введение самих терминов: эллипс, гипербола, парабола. На смысле этих терминов мы остановимся в дальнейшем

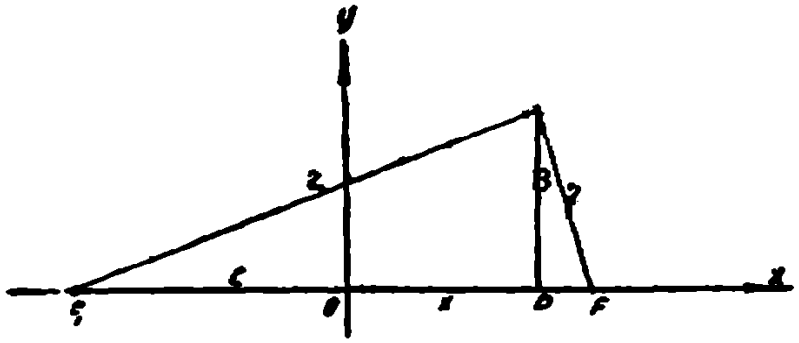
Часть I

1. КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ.

ЭЛЛИПС.

Вывод уравнения

Эллипс можно определить как геометрическое место точек, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек есть величина постоянная Исходя из этого определения, выведем



Чертеж 1.

уравнение эллипса Пусть F и F_1 – данные точки (черт. 1), причем $FF_1 = 2c$, $M(x, y)$—некоторая точка эллипса. Расстояния этой точки до данных точек F и F_1, назовем через r и r_1, а сумму их положим равной 2a Принимая FF_1, за ось x-ов, а перпендикуляр к ней, проходящий через середину,—за ось y-ов, получаем

$$r = \sqrt{y^2 + (c - x)^2}\,; \qquad r_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

и так как, согласно определению, $r + r_1 = 2a$, то

$$\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a$$

Освобождаясь от радикалов, мы приходим после преобразований к уравнению:

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)\,a^2$$

Так как из треугольника FMF_1 следует $2a > 2c$ и сл. $a > c$, то разность $a^2 - c^2$—существенно положительна; исходя из этого, полагаем $a^2 - c^2 = b^2$, тогда: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, после деления всех членов на a^2b^2, получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Из уравнения усматриваем прежде всего, что эллипс является кривой симметрической относительно обеих осей, а, следовательно, и относительно начала координат; из уравнения видно также, что $|x|$ не может превышать a, а $|y|$ не превышает b, в силу этого заключаем, что весь эллипс умещается внутри прямоугольника со сторонами $x=\pm a$ и $y=\pm b$

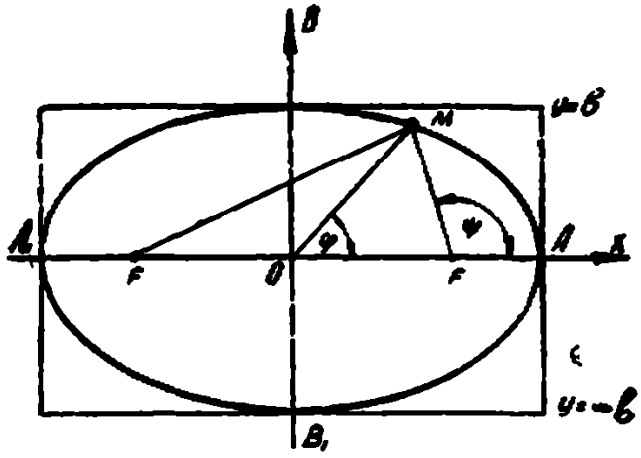
Основные элементы эллипса.

Дадим определения элементов эллипса.

Точки F и F_1 называют фокусами (черт. 2). Расстояние между фокусами $FF_1=2c$ называется линейным эксцентриситетом эллипса.

Оси симметрии эллипса называют главными осями его, при этом AA_1—большая ось, а BB_1—малая.

Полагая в уравнении эллипса $y=0$, находим $OA=a$ и, следовательно, длина большой оси. $AA_1=2a$, подобно этому длина малой оси $BB_1=2b$.



Чертеж 2

Точки A, A_1, B, B_1, называют вершинами эллипса. Прямые r и r_1, соединяющие точку эллипса с фокусами, называются фокальными радиусами-векторами.

Центр симметрии называют центром эллипса. Любую прямую, проходящую через центр,—диаметром.

Отношение линейного эксцентриситета эллипса к большой оси его называется численным, или астрономическим эксцентриситетом, обозначаемым обыкновенно через e.

Таким образом.

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Разность между осями эллипса $2a-2b$ называется линейным сжатием.

Отношение линейного сжатия к большой оси называется **численным сжатием** и обозначается через α.

Таким образом $\alpha = \frac{2a - 2b}{2a}$ *).

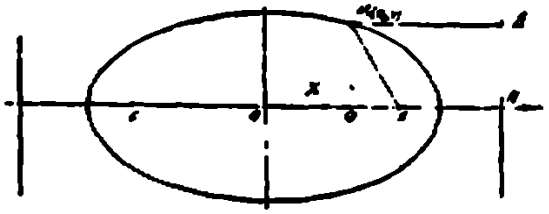
В высшей геодезии и астрономии вводят. угол φ между радиусом-вектором, проведенным из начала, и большой осью **эксцентрической аномалией**, а угол ψ между фокальным радиусом-вектором и большой осью— **истинной аномалией** эллипса.

Параметром эллипса называют длину всей хорды, проведенной через фокус перпендикулярно к большой оси, обозначаемую через 2p При этом p является фокальной ординатой и равняется $\frac{b^2}{a}$.

Директрисами эллипса называются прямые·

$$x = \pm \frac{a^2}{c}$$

Так как для эллипса $c < a$, то $\frac{a^2}{c} > a$ и, следовательно, обе директрисы проходят не пересекая эллипса.



Чертеж 3.

Возьмем на эллипсе некоторую точку M(x, y) (чертеж 3) Очевидно: $MD = PN = ON - OP = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{e}$,

а из предыдущего $MF = a - ex = \frac{a^2 - cx}{a}$, откуда

$$\frac{MF}{MD} = \frac{\frac{a^2 - cx}{a}}{\frac{a^2 - cx}{c}} = \frac{c}{a} = e.$$

Таким образом **эллипс является геометрическим местом точек, для которых отношение расстояния каждой точки от фокуса к расстоянию той же точки от соответствующей директрисы является постоянной величиной, равной эксцентриситету.**

*) Для земного меридиана линейное сжатие приблизительно равно 8 географическим милям, а численное—1 : 300

Соотношения между величинами, характеризующими форму и размеры эллипса

Так как при выводе уравнения мы положили $a^2-c^2=b^2$, то $c^2=a^2-b^2$ и, следовательно,

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Эта формула позволит находить линейный эксцентриситет.

Для определения астрономического эксцентриситета имеем

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

Так как $\sqrt{a^2-b^2}<a$, то $e<1$,—астрономический эксцентриситет эллипса меньше единицы

Выше мы имели

$$r=\sqrt{y^2+(c-x)^2}$$

$$r_1=\sqrt{y^2+(c+x)^2}$$

Возвышая в квадрат эти равенства и вычитая, имеем

$$r_1^2-r^2=4cx,$$

но с другой стороны $r_1+r=2a$; разделив 1-е равенство на 2-е, получаем $r_1-r=2\frac{c}{a}x=2ex$

Из двух последних равенств немедленно вытекают соотношения

$$r=a-ex$$

$$r_1=a+ex,$$

позволяющие находить фокальные радиусы-векторы для любой точки эллипса.

Параметрическая форма уравнения эллипса.

Прежде чем заняться рассмотрением некоторых свойств эллипса, заметим, что многие исследования значительно упрощаются, если иметь дело с параметрическими уравнениями эллипса, которые могут быть получены следующим образом решая каноническое уравнение эллипса относительно y, имеем $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; полагая $x=a\,\mathrm{Cos}\,t$, после подстановки получаем $y=b\,\mathrm{Sin}\,t$. Таким образом

параметрические уравнения эллипса могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{Cos}\,t \\ y = b\,\mathrm{Sin}\,t \end{cases}$$

Изменяя t от 0 до 2π, мы заставим точку M (t) описать полный эллипс

Геометрический смысл параметра t выяснится в дальнейшем

Радиус кривизны эллипса.

Пользуясь параметрическими уравнениями эллипса, получим выражение для радиуса кривизны его Имеем

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = \frac{(a^2\,\mathrm{Sin}^2\,t + b^2\,\mathrm{Cos}^2 t)^{3/2}}{-a\,\mathrm{Sin}\,t\,(-b\,\mathrm{Sin}\,t) - b\,\mathrm{Cos}\,t\,(-a\,\mathrm{Cos}\,t)} =$$

$$= \frac{(a^2\,\mathrm{Sin}^2\,t + b^2\,\mathrm{Cos}^2\,t)^{3/2}}{ab} = \frac{[a^2\,\mathrm{Sin}^2\,t + (a^2 - c^2)\,\mathrm{Cos}^2\,t]^{3/2}}{ab} =$$

$$= \frac{(a^2 - c^2\,\mathrm{Cos}^2\,t)^{3/2}}{ab}.$$

Из полученного выражения следует, что наименьшая кривизна будет при $\mathrm{Cos}^2\,t = 0$, т е при $t = \pm\frac{\pi}{2}$, что соответствует вершинам B и B_1, наибольшую кривизну эллипс имеет при $\mathrm{Cos}^2\,t = 1$ и, следовательно, при $t = 0$ и $t = \pi$, что соответствует вершинам A и A_1.

Определяя наибольший и наименьший радиусы кривизны эллипса, получаем:

$$R_A = \frac{(a^2 - c^2)^{3/2}}{ab} = \frac{b^2}{a} \quad \text{и} \quad R_B = \frac{(a^2)^{3/2}}{ab} = \frac{a^2}{b} \quad *)$$

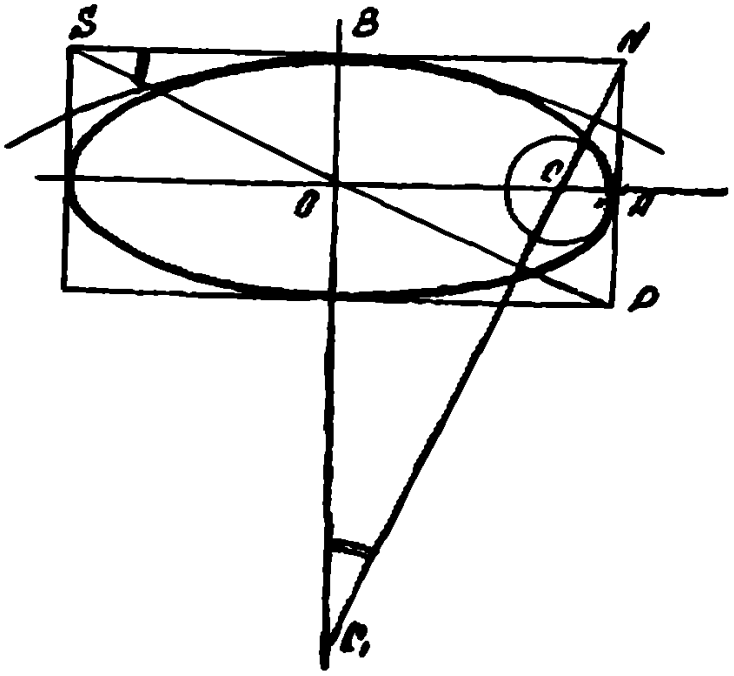
Построение центра кривизны.

Пользуясь этими выражениями, можно весьма просто построить центры кривизны эллипса в его вершинах. Для этого из точки N (чертеж 4) проводим прямую $NC_1 \perp SP$, тогда точки C и C_1 пересечения и будут искомыми центрами соответственно для вершин A и B.

*) $R_A = \frac{b^2}{a} = p$—таким образом радиус кривизны в вершинах, лежащих на большой оси эллипса, равен его полупараметру

Действительно, так как $\triangle ANC$ подобен $\triangle SNP$, то $\frac{CA}{NA} = \frac{NP}{SN}$ или $\frac{CA}{b} = \frac{2b}{2a}$, откуда $CA = \frac{b^2}{a} = R_A$.

Подобно этому из подобия треугольников BNC_1 и SNP получим $BC_1 = R_B$.



Чертеж 4.

Полученному выше выражению для определения радиуса кривизны эллипса можно придать более компактный вид:

$$R = \frac{[a^2 - c^2 \operatorname{Cos}^2 t]^{3/2}}{ab} = \frac{\left[a^2 - \frac{c^2}{a^2} a^2 \operatorname{Cos}^2 t\right]^{3/2}}{ab} =$$

$$= \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{3/2}}{ab} = \frac{[(a+ex)(a-ex)]^{3/2}}{ab} = \frac{(r r_1)^{3/2}}{ab}$$

Итак

$$R = \frac{(r r_1)^{3/2}}{ab}$$

Координаты центра кривизны эллипса определяются по формулам:

$$\xi = a \operatorname{Cos} t - b \operatorname{Cos} t \frac{a^2 \operatorname{Sin}^2 t + b^2 \operatorname{Cos}^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{Cos}^3 t$$

$$\eta = b\,\mathrm{Sin}\,t - a\,\mathrm{Sin}\,t\,\frac{a^2\mathrm{Sin}^2 t + b^2\mathrm{Cos}^2 t}{ab} = -\frac{a^2-b^2}{b}\,\mathrm{Sin}^3 t$$

Система уравнений

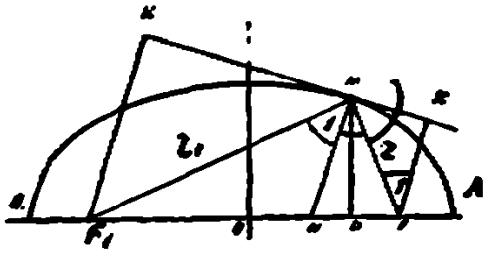
$$\begin{cases} \xi = \dfrac{a^2-b^2}{a}\,\mathrm{Cos}^3 t \\ \eta = -\dfrac{a^2-b^2}{b}\,\mathrm{Sin}^3 t \end{cases}$$

выражает параметрически эволюту эллипса, исследование формы которой будет приведено ниже

Свойства касательной и нормали

Рассмотрим теперь ряд свойств эллипса, связанных с его касательными и нормалями. Покажем, что углы, образованные фокальными радиусами-векторами точки касания, делятся касательной и нормалью пополам

Для доказательства этого свойства достаточно показать, что нормаль MN (чертеж 5) является биссектрисой угла M в треугольнике F_1MF, а для этого необходимо показать, что $\dfrac{F_1N}{NF} = \dfrac{F_1M}{FM}$.



Чертеж 5

Имеем

$$F_1N = c + ON = c + (OP - PN) = c + (x - PN)$$
$$FN = c - ON = c - (OP - PN) = c - (x - PN)$$

Но PN является поднормалью и, следовательно

$$PN = yy_1 = \left| -\frac{b^2x}{a^2} \right|,$$

тогда $F_1N = c + \left(x - \dfrac{b^2x}{a^2}\right) = c + \dfrac{a^2-b^2}{a^2}x = c + \dfrac{c^2}{a^2}x =$

$= \dfrac{c}{a}(a + ex)$, подобно этому $FN = \dfrac{c}{a}(a - ex)$, следовательно. $\dfrac{F_1N}{NF} = \dfrac{a+ex}{a-ex}$, но, с другой стороны, $F_1M = r_1 =$

$= a + ex$ и $FM = r = a - ex$, откуда $\dfrac{F_1M}{FM} = \dfrac{a+ex}{a-ex}$.

Таким образом действительно. $\frac{F_1N}{NF}=\frac{F_1M}{FM}$,—и свойство доказано

Итак, нормаль делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами, а касательная делит пополам угол между одним фокальным радиусом-вектором и продолжением другого

В силу этого свойства эллипса, если в одном из фокусов его поместить источник теплоты или света, то лучи, отражаясь от кривой, соберутся, следуя закону отражения (угол отражения равен углу падения), в другом фокусе этого эллипса Этим свойством объясняется происхождение термина фокус, что значит очаг.

Пользуясь указанным свойством эллипса, можно строить касательную и нормаль в любой точке его. Для этого достаточно построить биссектрису угла между фокальными радиусами-векторами Биссектриса эта и будет нормалью, а перпендикуляр к ней, проходящий через точку ее пересечения с эллипсом,—касательной.

Определим величину угла γ между нормалью и радиусом-вектором.

Из $\triangle F_1MF$ (черт. 4) имеем по формуле тригонометрии.

$$\operatorname{Cos}\gamma=\sqrt{\frac{(r+r_1+2c)(r+r_1-2c)}{4rr_1}}=\frac{b}{\sqrt{rr_1}}$$

Теперь не трудно определить длину перпендикуляров, опущенных из фокусов на касательные.
Имеем из $\triangle FMK$:

$$P=FK=r\operatorname{Cos}\gamma=\frac{rb}{\sqrt{rr_1}}$$

из $\triangle F_1MK$

$$P_1=F_1K=r_1\operatorname{Cos}\gamma=\frac{r_1b}{\sqrt{rr_1}}.$$

Перемножая полученные выражения, получаем

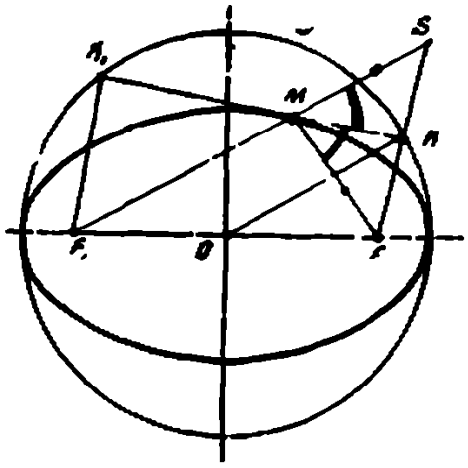
$$PP_1=b^2,$$

т е. произведение перпендикуляров, опущенных из фокусов эллипса на касательную, является для данного эллипса величиной постоянной, равной квадрату его малой полуоси

Определим OK (чертеж 6)—отрезок от начала до основания перпендикуляра, опущенного из фокуса на касательную. Для этого продолжим F_1M и FK до точки S их пересечения Очевидно, $KS = KF$ и, так как $OF = OF_1$, то OK является средней линией треугольника F_1SF и, следовательно, $OK = \frac{F_1S}{2}$, но $F_1S = F_1M + MS = F_1M + MF = 2a$, следовательно, $OK = a$

Искомое расстояние OK оказалось постоянным, не зависящим от координат точки касания Это показывает что основания перпендикуляров, опущенных из фокусов эллипса на его касательные, лежат на окружности круга, описанного около данного эллипса

В силу этого обстоятельства можно заметить, что если начертить круг, а затем, взяв прямой угол, двигать его так, чтобы вершина его скользила по начерченному кругу, а одна из сторон проходила бы при этом движении все время через некоторую постоянную точку F внутри круга, то другая сторона угла будет огибать при этом движении эллипс



Чертеж 6

Так как для эллипса $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\,Cos\,t}{a\,Sin\,t} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, то уравнение касательной к нему в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Найдем условие касания прямой $Ax + By + C = 0$ и эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Уравнение касательной к эллипсу может быть переписано в виде $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$ и, так как данная прямая $Ax + By + C = 0$ должна касаться эллипса в точке $M(x_1, y_1)$, то, очевидно, коэфициенты ее

уравнения должны быть пропорциональны коэфициентам уравнения касательной, т. е. $\frac{b^2x_1}{A}=\frac{a^2y_1}{B}=\frac{-a^2b^2}{C}$, откуда:

$$x_1=-\frac{Aa^2}{C} \quad \text{и} \quad y_1=-\frac{Bb^2}{C}$$

Так как x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению эллипса, то подставляя их значение в это уравнение, получим после упрощений искомое условие $A^2a^2+B^2b^2=C^2$

Определим теперь геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу пересекающихся под прямым углом

Пусть x и y—координаты некоторой точки искомого г. м.

Уравнение прямой, проходящей через точку M, примет вид $y-\bar{y}=k(x-\bar{x})$ или $kx-y-k\bar{x}+\bar{y}=0$

Так как эта прямая должна касаться эллипса, то на основании вышеприведенного условия имеем

$k^2a^2+b^2=(y-k\bar{x})^2$ или $(a^2-\bar{x}^2)k^2+2\bar{x}\bar{y}k+b^2-y^2=0$.

Этим уравнением определяются два угловых коэфициента k и k_1, касательных, проведенных из точки M к эллипсу. Так как эти касательные, согласно условию, перпендикулярны, то $kk_1=-1$, но из уравнения следует: $kk_1=\frac{b^2-\bar{y}^2}{a^2-\bar{x}^2}$, следовательно, $\frac{b^2-\bar{y}^2}{a^2-\bar{x}^2}=-1$, откуда получаем уравнение искомого г м $\bar{x}^2+\bar{y}^2=a^2+b^2$, являющегося окружностью с радиусом $\sqrt{a^2+b^2}$. Итак геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом, есть окружность, радиус которой равен расстоянию между концами осей эллипса

Определим длину нормали эллипса

$$N=y\sqrt{1+\bar{y}'^2}=b\operatorname{Sin}t\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\operatorname{Ctg}^2t}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2\operatorname{Sin}^2t+b^2\operatorname{Cos}^2t}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2\operatorname{Sin}^2t+(a^2-c^2)\operatorname{Cos}^2t}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{(a+ex)(e-ex)}=\frac{b(rr_1)^{1/2}}{a}$$

Воспользовавшись полученным выражением, дадим теперь общий способ построения центра кривизны эллипса из точки N (чертеж 7) проводим $NK\perp MN$, а затем из K проводим $KC\perp MF_1$, тогда точка C и будет центром

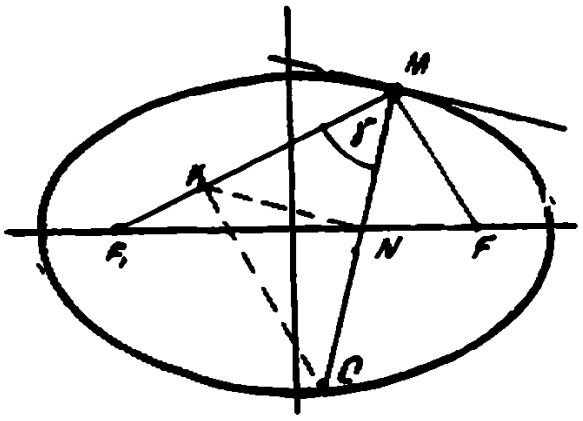
кривизны эллипса, соответствующим точке M. Действительно $MC=\frac{KM}{\cos\gamma}$, но $KM=\frac{N}{\cos\gamma}$ и, следовательно: $MC=\frac{N}{\cos^2\gamma}$, но мы уже видели выше, что $N=\frac{b(rr_1)^{1/2}}{a}$ и $\cos\gamma=\frac{b}{(rr_1)^{1/2}}$, тогда $MC=\frac{b(rr_1)^{1/2}}{a}\cdot\frac{rr_1}{b^2}=\frac{(rr_1)^{3/2}}{ab}=R$

Таким образом прямая MC является радиусом кривизны, а, следовательно, точка C—центром кривизны для точки M эллипса

Определим длину подкасательной для эллипса

$$S_T=\frac{y}{y'}=-\frac{a^2y^2}{b^2x},$$

если заменим y^2 его выражением, определенным из уравнения эллипса, то получим:

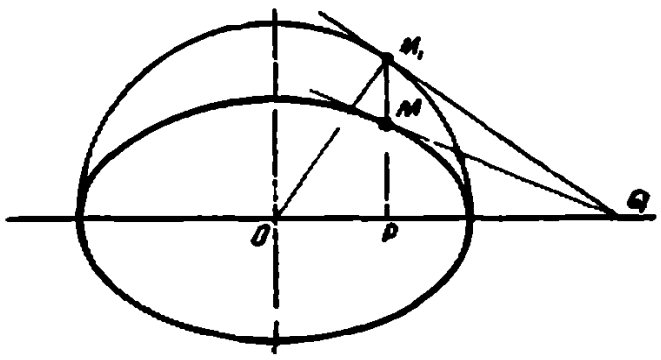


Чертеж 7

$$S_T=-\frac{a^2-x^2}{x}$$

Оказывается, длина подкасательной не зависит от ординаты „y" точки касания и от малой оси эллипса.

Таким образом, если на большой оси эллипса построить несколько эллипсов с различными малыми осями и провести к ним касательные в точках, имеющих общую абсциссу OP, то все эти касательные пересекут ось x-ов в одной и той же точке Q, так как все они будут иметь общую подкасательную PQ



Чертеж 8

Это замечание дает возможность строить касательную к эллипсу следующим путем: строим на большой оси окружность (черт. 8), продолжаем ординату, соответствующую точке M, до пересечения с окружностью в точке M_1; строим к окружности в точке M_1 касательную и продолжаем ее до

пересечения с осью x-ов в точке Q; теперь остается провести прямую QM, которая и будет касательной к эллипсу в точке M.

Эллипс как проекция круга.

Покажем, что эллипс можно рассматривать как ортогональную проекцию круга.

Пусть M (x, y) (чертеж 9) есть точка некоторого круга, спроектированного на плоскость, составляющую с его плоскостью угол φ. Проекция точки M точка M_1 будет иметь координаты $\bar{x}=x$ и $\bar{y}=y\,\mathrm{Cos}\varphi$.

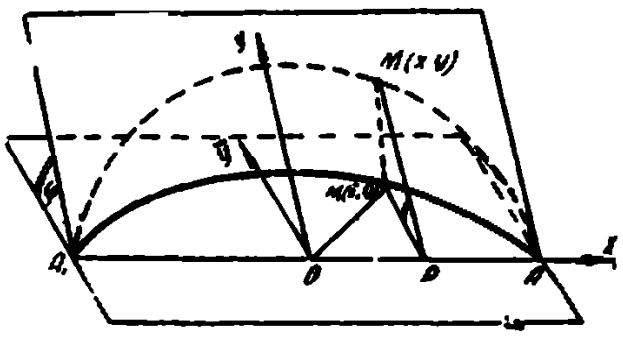
Подставляя в уравнение круга значения x и y, выраженные через $\bar{x}$ и $\bar{y}$, получаем.

$$x^2+\frac{\bar{y}^2}{\mathrm{Cos}^2\varphi}=a^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{(a\mathrm{Cos}\varphi)^2}=1$$

Полученная таким образом кривая в плоскости проекции действительно является эллипсом.

Если угол φ между плоскостями взять таким, что $\mathrm{Cos}\varphi=\frac{b}{a}$, то круг $x^2+y^2=a^2$ спроектируется в эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Чертеж 9.

Итак, эллипс является проекцией круга; справедливо и обратное предложение круг можно рассматривать как ортогональную проекцию эллипса, малая ось которого равна диаметру этого круга.

Это дает нам возможность утверждать, что в сечении цилиндра плоскостью получается эллипс

Если цилиндрическую поверхность, образованную прямыми проектирующими полуэллипс AMA_1 в полукруг AM_1A_1 развернуть на плоскость, то полуэллипс примет форму синусоиды (чертеж 10).

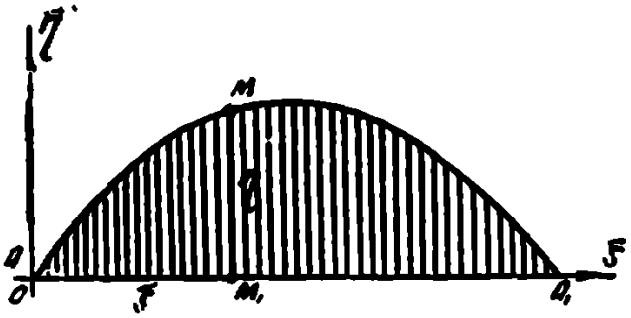
В самом деле, если обозначить MM_1 через η, а AM_1 через ξ, то из $\triangle MM_1P$ будем иметь

$$MM_1=\eta=M_1P\,\mathrm{tg}\varphi,$$

но из $\triangle OM_1P$ имеем $M_1P = b\,\mathrm{Sin}\angle M_1OP = b\,\mathrm{Sin}\frac{\smile AM_1}{a} =$

$= b\,\mathrm{Sin}\frac{\xi}{a}$; тогда $\eta = b\,\mathrm{Sin}\frac{\xi}{a}\,\mathrm{Tg}\varphi = b\,\mathrm{Tg}\varphi\,\mathrm{Sin}\frac{\xi}{a}$; обозначая постоянный множитель $b\,\mathrm{Tg}\varphi$ через C, получаем уравнение синусоиды $\eta = C\,\mathrm{Sin}\frac{\xi}{a}$.

Таким образом, если верхний край прямоугольника обрезать по синусоиде и затем свернуть этот прямоугольник в цилиндр, то полученный цилиндр будет в нижней части иметь сечение в форме круга, а в верхней—в форме эл-



Чертеж 10

липса. Это свойство эллипса используется в технике при изготовлении коленчатых труб.

Сопряженные диаметры эллипса и их свойства.

Обратимся теперь к некоторым свойствам эллипса, связанным с понятием сопряженных диаметров

Определим г. м середин параллельных хорд эллипса, общее уравнение которых $y = kx + c$.

Если обозначить координаты середин хорд через $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то, очевидно, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$, где x_1, x_2, y_1, y_2—координаты пересечения хорды с эллипсом

Для определения этих координат решаем систему

$$\begin{cases} y = kx + c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений y, получим $b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2kcx + a^2c^2 - a^2b^2 = 0.$

Из этого уравнения должны определиться x_1 и x_2, но по свойству корней квадратного уравнения имеем

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2kc}{b^2 + a^2k^2},$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2kc}{b^2 + a^2k^2} \qquad (1)$$

Подставляя найденное значение в уравнение хорд, получаем

$$\bar{y} = \frac{b^2c}{b^2 + a^2k^2} \qquad (2)$$

Таким образом мы получили уравнения искомого г. м. в функции параметра C; исключая его путем деления уравнений, приходим к уравнению:

$$\bar{y} = -\frac{b^2}{ka^2}\bar{x}$$

Уравнение показывает, что г. м. середин параллельных хорд служит прямая, проходящая через начало координат и являющаяся, следовательно, диаметром эллипса.

Итак: середины параллельных хорд лежат на одном из диаметров эллипса

Угловой коэфициент этого диаметра $k_1 = -\frac{b^2}{ka^2}$. Так как это соотношение совершенно симметрично относительно k и k_1, то, вообразив хорды, параллельные найденному диаметру, мы замечаем, что середины их будут лежать на диаметре, параллельном ранее взятым хордам; угловой коэфициент этого диаметра $k = -\frac{b^2}{k_1a^2}$.

Два диаметра эллипса, каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются взаимно сопряженными.

Угловые коэфициенты сопряженных диаметров находятся в соотношении:

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}$$

Так как для круга $b = a$, то $kk_1 = -1$; таким образом сопряженные диаметры круга взаимно перпендикулярны.

Выше мы видели, что эллипс является ортогональной проекцией круга и так как при проектировании середины параллельных хорд круга будут проектироваться в середины же параллельных хорд эллипса, то; сопряженные диаметры эллипса являются проекциями взаимно перпендикулярных диаметров круга, проекцией которого является данный эллипс.

Исходя из этого обстоятельства, можно вывести ряд весьма интересных свойств сопряженных диаметров эллипса

Так, например, мы можем утверждать, что касательная к эллипсу, проведенная через конец одного из сопряженных диаметров, будет параллельна другому.

В круге это свойство усматривается непосредственно, а при проектировании параллельные прямые дадут параллельные же прямые.

На этом же основании замечаем, что параллелограм, образованный касательными к эллипсу, проведенными в концах сопряженных диаметров, имеет постоянную площадь S

Это следует из того, что этот параллелограм является проекцией квадрата, описанного около проектируемого круга

Так как площадь проекции равна проектируемой площади, умноженной на Cos угла проекции, то

$$S = 4a^2 \operatorname{Cos}\varphi = 2a\,(2a \operatorname{Cos}\varphi).$$

Но выше мы видели, что $a \operatorname{Cos}\varphi = b$ — малой оси эллипса, полученного при проектировании Тогда $S = 4ab$.

Наконец, мы можем заметить, что площадь S параллелограма, диагоналями которого служат сопряженные диаметры эллипса, имеет также постоянную величину, ибо она является проекцией площади квадрата, вписанного в проектируемый круг; при этом очевидно

$$S = (a\sqrt{2})^2 \operatorname{Cos}\varphi = 2a^2 \operatorname{Cos}\varphi = \frac{2a \cdot 2a \operatorname{Cos}\varphi}{2} = 2ab.$$

Получим в заключение соотношение между сопряженными полудиаметрами эллипса и его полуосями, известное еще Аполлонию Пергскому. Пусть $y = kx$ и $y = -\frac{b^2}{a^2 k}x$ — уравнения сопряженных диаметров эллипса.

Найдем точки их пересечения с эллипсом, решая системы

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=-\frac{b^2}{a^2k}x \end{cases}$$

Получаем в результате решения

$$x_1=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \quad \text{и} \quad y_1=\pm\frac{abk}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}$$

$$x_2=\pm\frac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \quad \text{и} \quad y_2=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}.$$

Если обозначим длину 1-го полудиаметра через a_1, а длину 2-го—через b_1, то

$$a_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=ab\sqrt{\frac{1+k^2}{a^2k^2+b^2}}$$

и

$$b_1=\sqrt{\frac{a^4k^2+b^4}{a^2k^2+b^2}};$$

возвышая полученные выражения в квадрат и складывая, мы приходим, после упрощений, к искомому соотношению

$$a_1^2+b_1^2=a^2+b^2.$$

Таким образом сумма квадратов сопряженных полудиаметров эллипса равна сумме квадратов его полуосей.

Длина дуги эллипса, площадь, объем тела вращения и т. д.

При определении длины дуги эллипса для простоты выкладок удобнее взять его уравнения в виде

$$x=a\,\mathrm{Sin}\,t$$
$$y=b\,\mathrm{Cos}\,t$$

Тогда для четверти эллипса получаем

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\,\mathrm{Cos}^2t+b^2\,\mathrm{Sin}^2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\,\mathrm{Sin}^2t}\,dt=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{Sin}^2 t}\, dt = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 t}\, dt = a E(e),$$

Таким образом длина эллипса выражается эллиптическим интегралом 2-го рода и может быть подсчитана лишь при наличии таблиц

Можно также развернуть подынтегральную функцию в бесконечный ряд

$$(1 - e^2 \operatorname{Sin}^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin}^2 t - \frac{1}{2.4} e^4 \operatorname{Sin}^4 t - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \operatorname{Sin}^6 t + \ldots\ldots$$

и пользуясь тем, что этот ряд равномерно сходится при всех значениях „x", интегрировать полученное равенство, если при этом обозначить длину всего обвода эллипса через S, то получится соотношение.

$$S = 2\pi a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \ldots\ldots \right]$$

При расчетах, не требующих большой точности, пользуются более грубыми, приближенными формулами, считая, например, эллипс окружностью, радиус которой равен среднему арифметическому его полуосей или среднему геометрическому этих полуосей. Тогда для выражения длины всего обвода эллипса получаются простые формулы

$$S \approx \pi(a + b) \quad \text{и} \quad S \approx 2\pi \sqrt{ab}\,.$$

Заметим, что обе эти формулы обеспечивают точность лишь до e^4.

Отметим еще несколько формул для определения некоторых характерных для эллипса величин.

Площадь, ограниченная эллипсом $U = \pi ab$. Площадь сектора эллипса

$$\begin{cases} x = a \operatorname{Cos} t \\ y = b \operatorname{Sin} t, \end{cases}$$

радиусы-векторы которого ρ_1 и ρ_2 соответствуют значениям t_1 и t_2 параметра t, определяется по формуле

$$U = -ab \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{Sin} 2t \right]_{t_1}^{t_2}$$

Для эллипсоида вращения вокруг мал оси объем $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$

Для эллипсоида вращения вокр. больш. оси объем $V = \frac{3}{4} \pi a b^2$

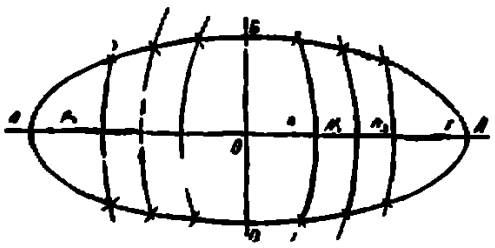
Центр тяжести квадранта эллипса в точке $C\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$

Способы построения эллипса.

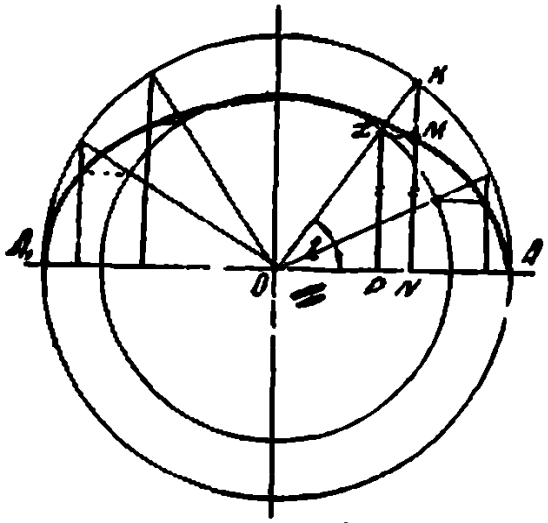
Остановимся прежде всего на графических способах получения эллипса

1-й способ—основанный на фокальном свойстве эллипса

Отложив в определенном масштабе величины осей эллипса от начала координат, получаем его вершины (чертеж 11). Для нахождения фокусов из B делаем засечки на оси AA_1 радиусом, равным a, тогда F и F_1—фокусы, так как при этом построении оправдывается соотношение $c^2 = a^2 - b^2$ Раскрываем циркуль на произвольное, но меньше 2a расстояние $r_1 = A_1N$ и описываем из F_1 дугу, а расстоянием $r = 2a - r_1 = AN$ описываем дугу из F. Точки пересечения этих дуг будут точками эллипса Повторяя этот прием, можно получить сколько угодно точек эллипса, которые затем останется соединить при помощи лекало плавной кривой



Чертеж 11



Чертеж 12.

2-й способ—построение с помощью осевых кругов. Из начала координат радиусами, равными большой и малой полуосям эллипса, описываем два круга (черт 12) Из центра проводим луч, который пересечет окружности в точках L и K Через точку L проводим параллель оси x, а через точку K—параллель оси y Точка M пересечения этих прямых будет точкой эллипса Построение оправдывается тем, что

$$ON = a\,Cos\,t$$

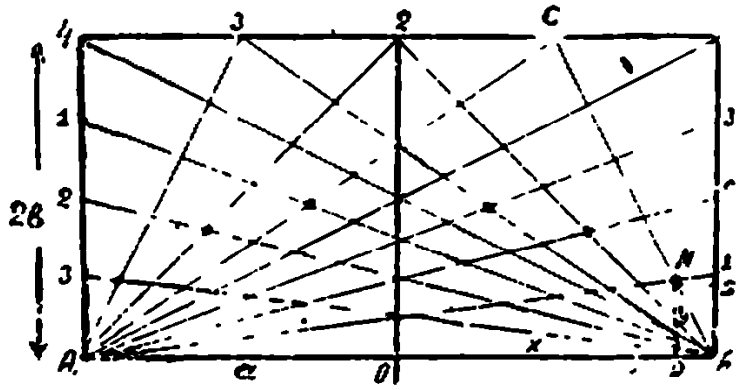
и $MN = LP = b\,Sin\,t$ или $\begin{cases} x = a\,Cos\,t \\ y = b\,Sin\,t \end{cases}$,

что дает параметрические уравнения эллипса Из этого построения уясняется геометрический смысл параметра t. Построение это было предложено впервые С. Стевином.

3-й способ—построение при помощи прямоугольника. Строим прямоугольник, основание которого равно 2a, а

высота равна 2b (чертеж 13) Делим верхнюю и боковые стороны на n равных частей каждую. Соединяем точки пересечения лучами, как показано на чертеже

Тогда точки пересечения одинаково нумерованных лучей будут точками эллипса, полуоси которого равны a и b



Чертеж 13

Для доказательства этого заметим предварительно, что если отрезок A1 принять за единицу, то отрезок CK будет равен $\frac{a}{b}$

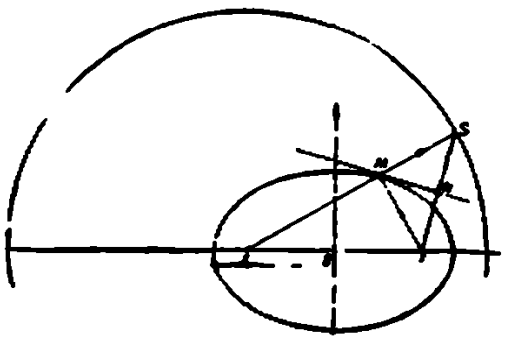
Воспользовавшись подобием треугольников $A_1 1A$ и $A_1 MP$, получаем $\frac{a+x}{2a} = \frac{y}{1}$, а из подобия треугольников ACK и AMS имеем

$$\frac{a-x}{a/b} = \frac{y}{2b}$$

Из этих равенств получаем

$$x = \frac{a(4b^2-1)}{4b^2+1} \text{ и } y = \frac{4b^2}{4b^2-1}.$$

Возвысив в квадрат полученные равенства и сложив, придем к уравнению эллипса



Чертеж 14

4-й способ—построение с направляющим кругом Пусть F и F_1—фокусы эллипса (чертеж 14). Опишем из F_1 круг радиусом, равным 2a Возьмем какую-либо точку S на окружности этого круга и соединим ее с фокусом F. Из середины прямой SF восстанавливаем перпендикуляр до пересечения в точке M с прямой F_1S Точка M будет принадлежать эллипсу, большая ось которого равна F_1S, а фокусы находятся в

точках F и F_1. Действительно, $\triangle FMS$—равнобедренный и, следов., $MS = MF$, а в таком случае $F_1S = F_1M + MF$

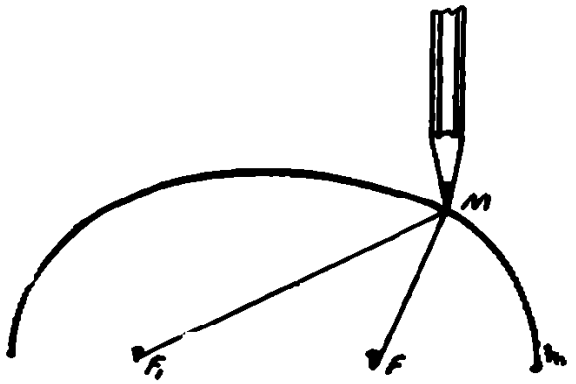
Взяв вторую произвольную точку на окружности и повторив сделанное построение, найдем еще одну точку эллипса и т. д.

Исходя из этого построения, мы могли бы эллипс рассматривать как геометрическое место точек, одинаково удаленных от точки F и от окружности некоторого круга, называемого направляющим

Образование эллипса механическим путем.

Рассмотрим теперь способы образования эллипса механическим путем.

1-й способ—в точках F и F_1 (чертеж 15), являющихся фокусами эллипса, закрепляют концы нити, длина которой равна 2a, и натягивают нить концом карандаша. Двигают карандаш, оставляя нить все время натянутой, при этом острие M карандаша описывает эллипс

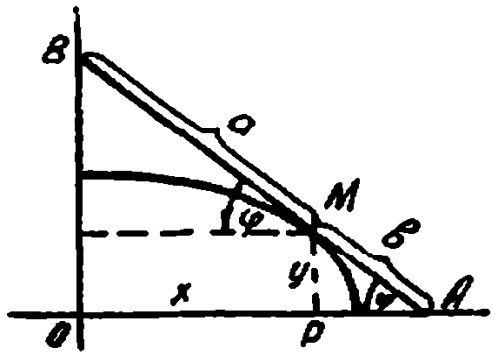


Чертеж 15

2-й способ—построение эллипса с помощью стержня. Вообразим прямую постоянной длины, которая скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым OA и OB (чертеж 16). Если в точке M закрепить чертящее острие, то оно при скольжении стержня опишет эллипс

Действительно, обозначив MB через a и MA через b, получаем параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ y = b\,\mathrm{Sin}\,\varphi \end{cases}$$



Чертеж 16

Этот способ построения эллипса положен в основу конструкции эллиптического циркуля Рона

Если вообразим прямую AB продолженной, то не трудно убедиться, что при движении AB любая точка M, лежащая на ее продолжении, также описывает эллипс (черт 17).

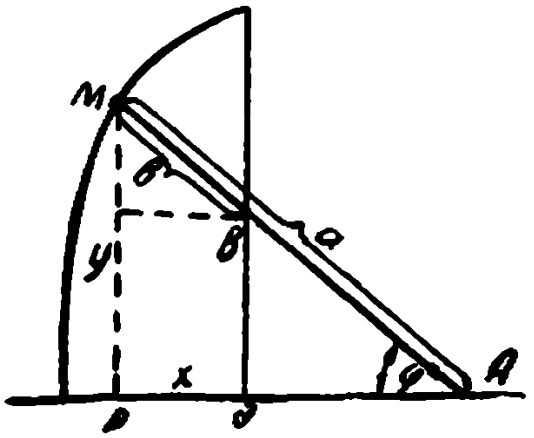
В самом деле, из чертежа снова замечаем, что

$$x = -b \cos \varphi$$

$$y = a \sin \varphi$$

Исключая из этих уравнений φ, мы придем к каноническому уравнению эллипса

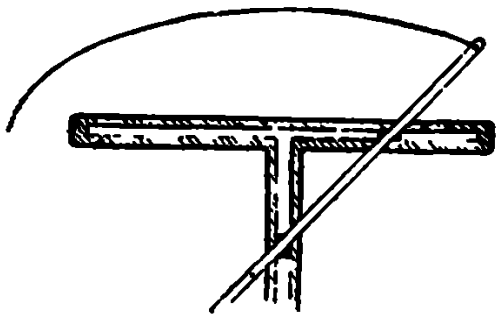
По второму способу построения эллипса сконструирован эллиптический циркуль Рифлера (чертеж 18), позволяющий вычерчивать эллипсы различных размеров по заданным осям



Чертеж 17

3-й способ — вычерчивание эллипса механическим путем может быть также осуществлено при помощи так называемых Кардановых кругов

Вообразим, что по внутренней стороне некоторого круга катится другой круг с диаметром вдвое меньшим (черт 19). При этом движении точки А и О будут двигаться по прямым АО и ОВ *) Таким образом диаметр малого круга будет играть роль прямой постоянной длины, которая скользит своими концами по прямым АО и ОВ, подобно тому как мы имели это выше и, следовательно, любая точка диаметра АО опишет при этом движении эллипс, при этом, очевидно, самый центр малого круга будет двигаться по окружности



Чертеж 18

Так как роль диаметра ОА может играть любой диаметр малого круга, то можно заметить, что при движении малого круга любая точка его, не лежащая на окружности, описывает эллипс, центром которого служит центр большого круга

Заметим в заключение, что если плоскость скользит по другой плоскости так, что две ее точки перемещаются по двум взаимно перпендикулярным прямым, лежащим в другой

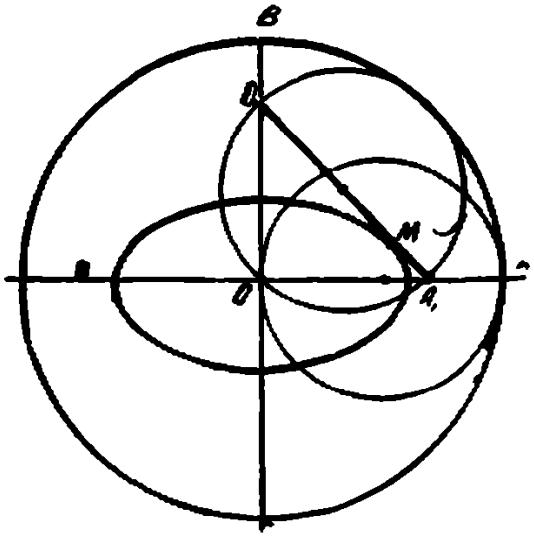
*) См стр

плоскости, то движение этой плоскости называют эллиптическим. Очевидно, при этом движении любая точка подвижной плоскости описывает эллипс.

Построение центра эллипса, его осей и касательной к нему.

Заканчивая рассмотрение вопросов, связанных с построением эллипса, остановимся еще на нахождении центра уже начерченного эллипса и построения его осей.

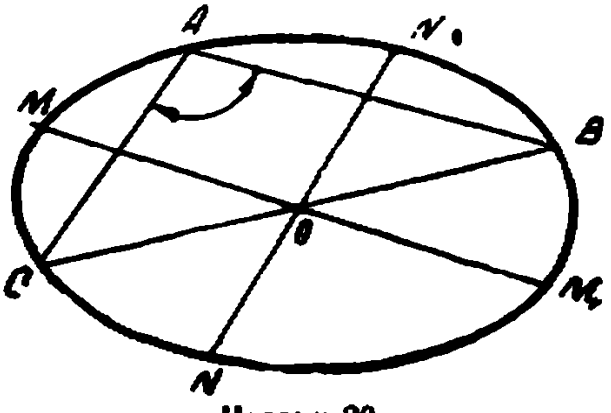
Для определения центра проводим в данном эллипсе две параллельные хорды и через точки деления этих хорд пополам проводим прямую, которая, очевидно, будет диаметром, разделив его пополам, найдем центр эллипса



Чертеж 19.

Для проведения осей в эллипсе пользуются так называемыми дополнительными хордами, каковыми называются хорды, выходящие из какой-либо точки эллипса к концам его диаметра Эти хорды обладают тем свойством, что диаметры, параллельные им, оказываются сопряженными

Действительно, пусть $MM_1 \| AB$ и $NN_1 \| AC$ (чертеж 20). Очевидно, прямая MM_1 будучи параллельна AB и проходя через середину BC, должна пройти и через середину AC. Подобно этому прямая NN_1 проходит через середину AB, но это и показывает, что MM_1 и NN_1 будут сопряженными диаметрами Но в таком случае, если $\angle A$ будет равен 90°, то сопряженные диаметры MM_1 и NN_1 будут взаимно перпендикулярны и, следовательно, будут осями



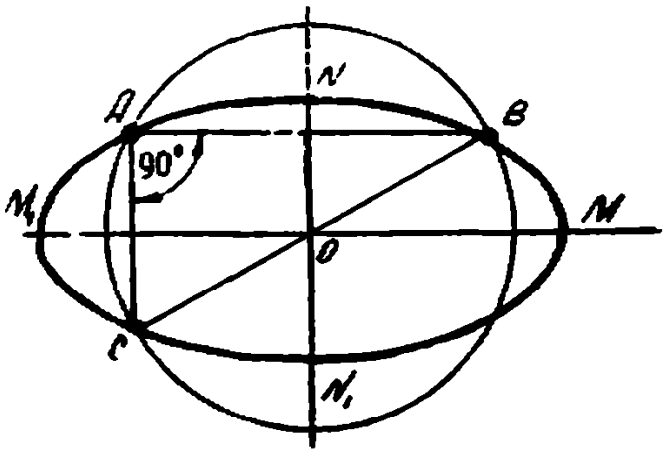
Чертеж 20

Исходя из этого, для построения осей эллипса из центра O радиусом, меньшим чем a,

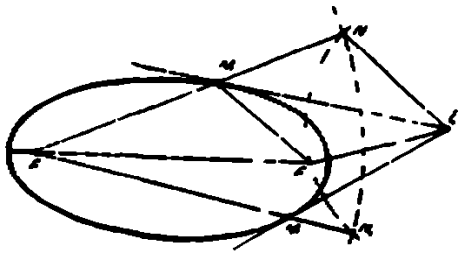
проводим окружность, пересекающую эллипс в точках B' A и C (чертеж 21) Очевидно, ∠A—прямой. Проведя через O прямые MM_1 и NN_1, мы получим оси данного эллипса.

Способы построения касательной к эллипсу в точке, лежащей на нем, мы отмечали выше Для построения касательной к эллипсу из точки, лежащей вне его, поступаем так

Пусть C—точка, из которой нужно провести касательную к эллипсу (черт 22) Проводим из F_1 дугу направляющего круга Из точки C, радиусом равным CF, проводим дугу, которая пересечет дугу направляющего круга в точках N и N_1 Соединяем N и N_1 с фокусом F_1 и через точки пересечения M и M_1 этих прямых с эллипсом проводим прямые CM и CM_1,—это и будут касательные к нашему эллипсу из точки C Действительно, из равенства треугольников NCM и FCM следует, что ∠NMF разделен прямой MC пополам, но свойством делить этот угол пополам обладает только касательная



Чертеж 21



Чертеж 22

Применение эллипса

Благодаря целому ряду свойств, важнейшие из которых рассмотрены нами выше, эллипс имеет много применений в различных областях техники и науки Рассмотрим некоторые из них

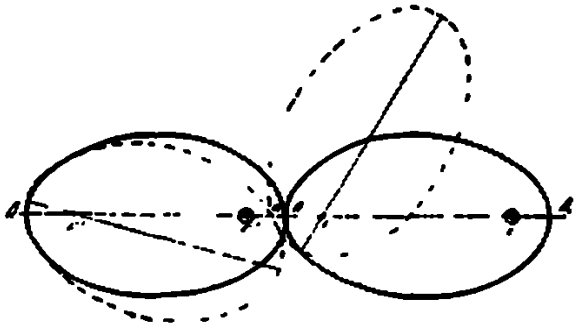
1. Эллиптические зубчатые колеса

В таких механизмах, как строгательные станки, дыропробивные прессы, формовочные машины и т п, необхо-

димо бывает обеспечить неравномерность движения ведомого вала во время его полного оборота при равномерном движении ведущего вала, позволяющую сделать так называемый рабочий ход более медленным, а холостой — более быстрым Это достигается при помощи эллиптических зубчаток Вообразим два совершенно тождественных эллипса, насаженных на валы, проходящие через их правые фокусы F и F', при этом пусть будет расстояние между центрами валов $FF' = 2a$ (чертеж 23).

Очевидно, при этом условии, эллипсы при вращении валов будут все время касаться друг друга и точка их касания будет находиться всегда на прямой FF', ибо благодаря тому, что эллипсы совершенно одинаковы и что движение их происходит без скольжения (что достигается наличием зубцов), сумма расстояния точки их касания A от точек F и F_1 будет оставаться все время равной FF'.

Если теперь вообразить; что левый вал F' вращается с некоторой постоянной угловой скоростью ω, то движение его, передавшись правому эллипсу, вызывает движение вала F этого эллипса, но угловая скорость ω_1 этого движения уже не будет постоянной



Чертеж 23.

Действительно, в каждый данный момент отношение угловых скоростей ω и ω_1 будет равно обратному отношению радиусов вращения в этот момент, т. е $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{FM}{MF'}$, но, очевидно, в каждый следующий момент отношение будет уже иным, в силу чего $\omega_1 = \frac{FM}{MF'}\omega$ будет величиной переменной; при этом, очевидно, наибольшее значение ω_1 получит при наибольшем значении FM и при наименьшем значении MF_1. Очевидно, это положение наступает, когда M совпадает с A При этом $FM = a + c$ и $MF' = a - c$.

Итак $$\omega_{1max} = \frac{a+c}{a-c}\omega.$$

Подобно этому не трудно установить, что.

$$\omega_{1min} = \frac{a-c}{a+c}\omega.$$

Итак при вращении вала F' с постоянной угловой скоростью ω, вал F будет вращаться с переменной угловой скоростью ω_1, достигающей в течение полного оборота один раз своего максимум значения, равного $\frac{a+c}{a-c}\omega$, и один раз минимум значения, равного $\frac{a-c}{a+c}\omega$.

Обозначим отношение $\frac{\omega_{1max}}{\omega_{min}} = \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2$ через γ, тогда быстро сможем получить формулу

$$a = \frac{\sqrt{\gamma}+1}{\sqrt{\gamma}-1}c,$$

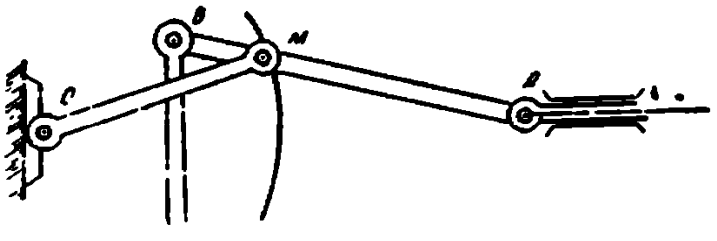
которая выражает соотношение между a и c эллиптических зубчаток, позволяющих осуществить неравномерное движения вала F, при котором отношение максимальной или минимальной угловых скоростей равно заданному числу γ

2 Патрон Леонардо да Винчи

Для вытачивания эллиптических колес на токарных станках употребляется патрон, изобретенный Леонардо да Винчи При помощи этого патрона можно обтачивать данную вещь по эллипсу, подобно тому как в обыкновенных станках вещь обтачивается по кругу Образование эллиптического движения при помощи этого патрона производится по тому же принципу, с которым мы встречались выше, рассматривая движение Кардановых кругов

3. Эллиптическое прямило

Выше мы видели, что при скольжении прямой постоянной длины концами по двум взаимно перпендикулярным прямым любая точка этой прямой описывает эллипс Если, наоборот, точку M некоторой прямой постоянной длины двигать по эллипсу, то концы



Чертеж 24

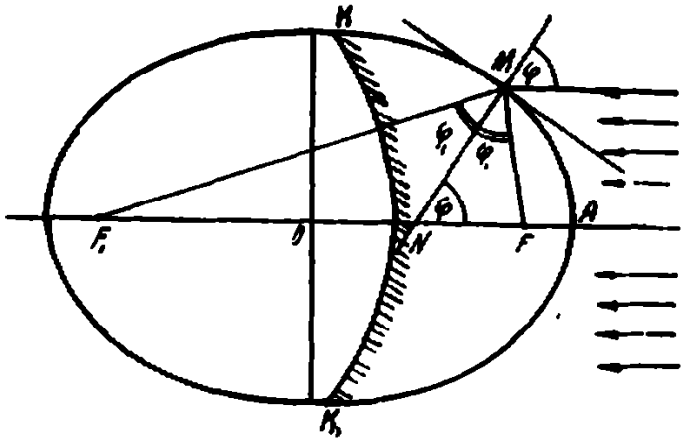
этой прямой будут двигаться по прямой OA и OB (черт 24). Это обстоятельство используется в технике при устройстве так называемых эллиптических коромысел, или прямил, позволяющих движение по эллипсу преобразовывать в движение по прямой

На практике точку M заставляют двигаться не по эллипсу, а по окружности, которая имеет в точке O такую же кривизну как эллипс, вследствие чего точка B будет двигаться уже не по прямой, а по некоторой изогнутой линии, но при небольших углах размаха стержня MC эта изогнутая линия будет мало отличаться от прямой

4. Эллиптическое зажигательное стекло

Упомянем еще об эллиптическом зажигательном стекле, изобретенном Декартом

Если в одном из фокусов эллипса поместить источник тепловых лучей, то лучи эти, отразившись от периферии



Чертеж 25

эллипса, соберутся в другом фокусе, благодаря свойству нормали эллипса составлять равные углы с фокальными радиусами-векторами

Вообразим теперь линзу, являющуюся телом вращения сегмента KAK_1, образованного дугой эллипса и дугой круга, центр которого в фокусе F_1 (чертеж 25)

Предположим, что на эллиптическую поверхность линзы падает пучок параллельных лучей.

Из $\triangle NMF$ имеем

$$\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varphi_1 = MF \quad NF = (a - ex) \cdot \frac{c}{a} (a - ex) = a\ c = \frac{1}{e}.$$

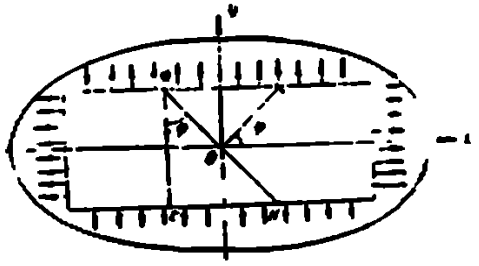
Таким образом, если показатель преломления стекла линзы является величиной обратной эксцентриситету эллипса, то лучи, преломившись и выйдя из линзы, соберутся в фокусе F_1, так как в силу того, что на сферическую поверхность они падут перпендикулярно, они не испытают вторичного преломления при выходе из линзы в воздух и каждый луч пойдет по радиусу окружности, центр которой в точке F_1

В обыкновенной сферической линзе параллельные лучи после преломления и выхода из линзы пересекаются, как известно, не в фокусе, а образуют около него некоторую поверхность („диакаустика") В линзе Декарта все лучи пересекутся в фокусе Таким образом эта линза могла бы служить идеальным зажигательным стеклом, (если не считать того обстоятельства, что различным длинам волн, составляющих луч, соответствуют различные показатели преломления) Но, к сожалению, отшлифовать стекло эллиптически совершенно не представляется возможным, благодаря этому „линза Декарта" имеет лишь чисто теоретический интерес

5 Эллипс напряжения и эллипс инерции

В курсах механики и сопротивления материалов встречаются понятия эллипс напряжения и эллипс инерции

Предположим, что некоторый брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, подвержен растяжению по двум взаимно перпендикулярным направлениям (чертеж 26). Если обозначить через P_x и P_y равнодействующие сил растяжения, направленных параллельно осям ox и oy, а через F_2 и F_1 площади верхней и боковой граней параллелепипеда, то отношения $\alpha = \frac{P_x}{F_1}$ и $\beta = \frac{P_y}{F_2}$ называют главными напряжениями на боковой и верхней гранях (главное напряжение можно таким образом определить как усилие, приходящееся на единицу площади).



Чертеж 26.

Определим напряжение, которое испытывает некоторое сечение MN нашего бруска, перпендикулярное к плоскости чертежа и проходящее через начало, при этом пусть угол,

составленный перпендикуляром к этому сечению и осью х-ов равен φ. Очевидно искомое напряжение составится из двух слагаемых—одно из них p_x—напряжение, испытываемое сечением в направлении, параллельном оси х-ов, другое—p_y—напряжение в направлении оси у-ов.

Нетрудно видеть, что

$$p_x = \frac{P_x}{F} = \frac{\alpha F_1}{F} = \frac{\alpha F \operatorname{Cos}\varphi}{F} = \alpha \operatorname{Cos}\varphi,$$

подобно этому $p_y = \dfrac{\beta F \operatorname{Sin} F}{F} = \beta \operatorname{Sin}\varphi$, где F—площадь сечения MN.

Полученные формулы

$$p_x = \alpha \operatorname{Cos}\varphi$$
$$p_y = \beta \operatorname{Sin}\varphi$$

выражают закон изменения напряжений горизонтального и вертикального, испытываемых сечением MN, в зависимости от величины угла φ. Графически этот закон выражается, как это видно из полученных уравнений, эллипсом с полуосями α и β, совпадающими с направлениями равнодействующих горизонтальных и вертикальных сил растяжения.

Полное напряжение, испытываемое сечением MN, может быть выражено вектором, составляющие которого будут p_x и p_y.

Изменение длины этого вектора при изменении угла φ будет характеризовать изменение напряжения, испытываемого сечением. Графически это изменение и выражается **эллипсом напряжения**.

Если $\alpha = \beta$, то эллипс обратится в круг; вектор напряжения для всякого угла φ будет сохранять одну и ту же величину, и следовательно, все площади сечений будут испытывать **одинаковые напряжения**.

Если одно из главных напряжений, например β, равно 0, то растяжение будет происходить только по оси х-ов и эллипс напряжения обратится в прямую.

При изучении напряженного состояния тела, подвергнутого растяжению по трем направлениям, имеют дело с **эллипсоидом напряжения**.

Величина, характеризующая инерцию тела при вращении его около некоторой оси u, называется моментом инерции J_u этого тела относительно данной оси вращения (чертеж 27).

В курсах механики доказывается, что момент инерции некоторой плоской однородной фигуры относительно оси x и y выражается соответственно интегралами

$$J_x = \int_P y^2\,dx$$

$$J_y = \int_P x^2\,dy$$

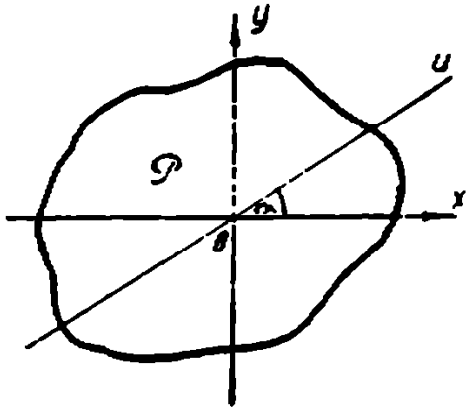
Если начало системы — точка O является центром тяжести данной фигуры, то оси координат называют главными центральными осями инерции Если известны J_x и J_y—моменты инерции относительно главных осей, то момент инерции J_u относительно любой оси u, проходящей через начало, определяется по формуле

$$J_u = J_x \operatorname{Cos}^2\alpha + J_y \operatorname{Sin}^2\alpha,$$

как это доказывается в курсах сопротивления материалов; при этом α—угол, составляемый осью u с осью x-ов

Разделив все члены полученной формулы на P (площадь пластинки), будем иметь

$$\frac{J_u}{P} = \frac{J_x}{P}\operatorname{Cos}^2\alpha + \frac{J_y}{P}\operatorname{Sin}^2\alpha$$



Чертеж 27

Величины $\sqrt{\frac{J_u}{P}}$; $\sqrt{\frac{J_x}{P}}$, $\sqrt{\frac{J_y}{P}}$, называют радиусами инерции и обозначают r_u, r_x и r_y. При этом замечании наша формула примет вид.

$$r_u^2 = r_x^2 \operatorname{Cos}^2\alpha + r_y^2 \operatorname{Sin}^2\alpha.$$

Отложим теперь на каждой оси от начала отрезки ρ_u, ρ_x и ρ_y—обратно пропорциональные радиусам инерции, соответствующим этим осям.

Таким образом $\rho_u = \frac{k}{r_u}$, $\rho_x = \frac{k}{r_x}$ и $\rho_y = \frac{k}{r_y}$, где k—некоторый коэфициент пропорциональности.

Подставляя эти выражения в формулу, получим уравнение геометрического места, которое образуют концы этих отрезков $\frac{1}{\rho_u^2} = \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\rho_x^2} + \frac{\operatorname{Sin}^2\alpha}{\rho_y^2}$. Но $\operatorname{Cos}^2\alpha = \frac{x^2}{\rho_u^2}$ и

$\sin^2\alpha = \frac{y^2}{\rho_a^2}$, подставляя получаем. $\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1$

Пользуясь произволом в выборе k, полагаем

$$k = r_x r_y,$$

при этом, очевидно, $\rho_x = r_y$ и $\rho_y = r_x$, тогда уравнение полученного г. м примет вид

$$\frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1.$$

Как видно, это уравнение эллипса, полуоси которого являются главными радиусами инерции данной пластинки Эллипс этот называют эллипсом инерции Эллипс инерции имеет большое значение в теории сопротивления материалов, в частности в вопросах об изгибании балок, характеризуя величины моментов инерции данной пластинки относительно различных осей, что как раз крайне необходимо для установления прочности балки, ибо как доказывается сопротивление изгибу у данной балки пропорционально моменту инерции ее сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения и перпендикулярной к изгибающей силе

В силу этого обстоятельства, прочность балки при изгибании характеризуется эллипсом инерции сечения этой балки

6 Эллипс в космическом пространстве.

Эллипс непосредственно осуществляется в окружающем нас космическом пространстве при движении планет Согласно 1-му закону Кеплера, орбита планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце В частности наш земной шар имеет орбиту в форме эллипса, эксцентриситет которого $e = 0{,}017$ Меридиан земного шара имеет форму эллипса с эксцентриситетом $e = 0{,}08$.

В строительной технике по эллипсу иногда очерчивают арки сводов

ГИПЕРБОЛА

Вывод уравнения и исследование формы

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек есть величина постоянная

Для вывода уравнения гиперболы положим, что F и F_1 — данные точки (чертеж 28), причем $FF_1 = 2c$, $M(x, y)$ — некоторая точка гиперболы. Расстояния MF и MF_1 этой точки до данных F и F_1 назовем через r и r_1, а разность их положим равной $2a$

Приняв FF_1 за ось x-ов, а перпендикуляр к ней, проходящий через середину — за ось y-ов, имеем

$$r = \sqrt{y^2 + (c - x)^2} \quad \text{и} \quad r_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

и, так как согласно определения $r_1 - r = 2a$, то

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a$$

После упрощений приходим к уравнению.

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = (c^2 - a^2)\, a^2$$

Так как из $\triangle FMF_1$ следует, что $2c > 2a$, то $c > a$ и, следовательно, разность $c^2 - a^2$ существенно положительна, полагаем в силу этого $c^2 - a^2 = b^2$, тогда $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и окончательно

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Из полученного уравнения следует, что гипербола является кривой, симметричной относительно обеих координат осей и относительно начала

Решая уравнение гиперболы относительно y, имеем $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, откуда видим, что при $x = 0$ y оказывается мнимым, следовательно, кривая не пересекается с осью y-ов, но y остается также мнимым для всех значений x, заключенных между $+a$ и $-a$, таким образом в области,

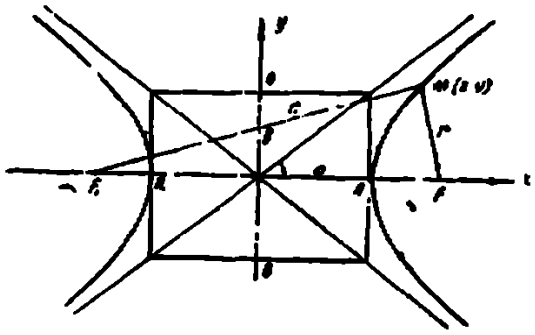
ограниченной прямыми $x=a$ и $x=-a$, гипербола не существует. Наконец из последнего уравнения видно также, что при неограниченном возрастании x, y неограниченно же возрастает.

В силу всех этих замечаний гипербола должна состоять из двух симметрично расположенных ветвей, уходящих в бесконечность.

Основные элементы гиперболы.

Дадим определения основных элементов гиперболы

Точки F и F_1 называются фокусами (чертеж 28). Расстояние между фокусами $FF_1=2c$ называют линейным эксцентриситетом



Чертеж 28

Оси симметрии AA_1 и BB_1 называют осями гиперболы Полагая в уравнении гиперболы $y=0$, находим $OA=a$ и, следовательно, $AA_1=2a$, при $x=0$ имеем $OB=bi$ и следовательно, $BB_1=2bi$, в силу этого ось AA_1 называют действительной осью гиперболы, а BB_1—мнимой, считая длину ее равной 2b

Точки A и A_1 называют вершинами.

Прямые r и r_1—фокальными радиусами-векторами

Центр симметрии O называется центром гиперболы

Любая прямая, проходящая через центр, называется диаметром гиперболы

Отношение линейного эксцентриситета 2c к большой оси называется астрономическим, или численным эксцентриситетом гиперболы, обозначаемым обычно через e

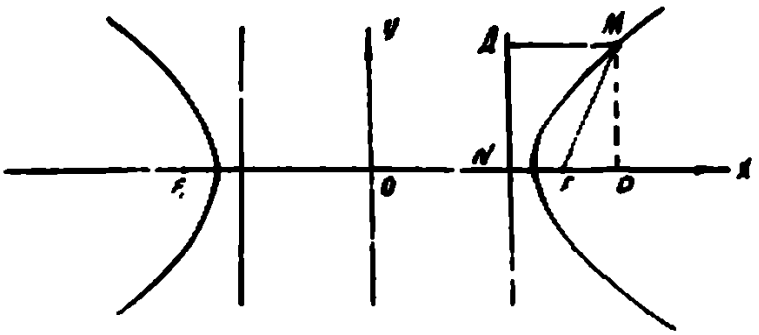
Таким образом $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$. Перпендикуляр в фокусе к действительной оси называется полупараметром гиперболы, обозначаемым через p; не трудно убедиться, что

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Директрисами гиперболы называются прямые·

$$x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Так как для гиперболы $c > a$, то $\frac{a^2}{c} < a$ и, следовательно, обе директрисы не пересекают ветвей гиперболы Возьмем на гиперболе некоторую точку M (x, y) (чертеж 29), очевидно $MD = OP - ON = x - \frac{a^2}{c} = \frac{cx - a^2}{c}$, а из предыдущего $MF = ex - a = \frac{cx - a^2}{a}$



Чертеж 29

Тогда

$$\frac{MF}{MD} = \frac{cx - a^2}{a} : \frac{cx - a^2}{c} = \frac{c}{a} = e$$

Таким образом гипербола является геометрическим местом точек, для которых отношение расстояния каждой точки от фокуса к расстоянию той же точки от соответствующей директрисы является постоянной величиной, равной эксцентриситету.

Ассимптоты гиперболы

Сопоставим явное уравнение гиперболы.

$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ с уравнением прямой $y = \pm \frac{b}{a} x$. Для одной и той же абсциссы „x" ординаты „y" гиперболы будет отличаться от ординаты „$\bar{y}$" прямой на величину

$$y-\bar{y}=\pm\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]$$

Найдем предел этой разности, заставив $x\to\infty$

$$\lim(y-\bar{y})=\lim=\pm\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

Полученный результат показывает, что при $x\to\infty$ ветви гиперболы неограниченно приближаются к прямым

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}x$$

В силу этого данные прямые будут ассимптотами гиперболы.

Угловой коэфициент ассимптоты не зависит от длины осей, а только от отношения этих длин. Благодаря этому, данные ассимптоты будут ассимптотами всех гипербол, оси которых равны ak и bk, где k—некоторый коэфициент пропорциональности *)

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ называются сопряженными. Очевидно, сопряженные гиперболы имеют общие ассимптоты

Основные соотношения между величинами, характеризующими форму гиперболы

Так как при выводе уравнения мы положили

$$c^2-a^2=b^2,$$

то

$$c^2=a^2+b^2$$

и, следовательно

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

Полученная формула позволяет находить линейный эксцентриситет гиперболы по ее осям

---

*) k называется также коэфициентом подобия системы подобных гипербол $\frac{x^2}{a^2k^2}-\frac{y^2}{b^2k^2}=1$.

Для определения астрономического эксцентриситета имеем

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

так как

$$\sqrt{a^2 + b^2} > a,$$

то $e > 1$ — астрономический эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы
Выше мы имели

$$r = \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

и

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (x + c)^2}$$

Возвышая эти выражения в квадрат и вычитая, получаем

$$r_1^2 - r^2 = 4cx \qquad (1),$$

но с другой стороны по определению гиперболы имеем

$$r_1 - r = \pm 2a, \qquad (2)$$

при этом знак „+" относится к точкам правой ветви гиперболы, а „—" к левой

Разделив равенство (1) на (2), получаем

$$r_1 + r = \pm 2ex$$

Тогда, решая систему

$$\begin{cases} r_1 + r = \pm 2ex \\ r_1 - r = \pm 2a, \end{cases}$$

находим выражения фокальных радиусов-векторов для правой ветви

$$r = ex - a \qquad r_1 = ex + a$$

и для левой

$$r = a - ex \qquad r_1 = -a - ex$$

Параметрическая форма уравнения гиперболы

Решив уравнение гиперболы относительно y, получим $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Если теперь положить $x = a\,\mathrm{Sec}\,t$, то после подстановки найдем соответствующее выражение для y $y = b\,\mathrm{Tg}\,t$ Уравнение $\begin{cases} x = a\,\mathrm{Sec}\,t \\ y = b\,\mathrm{Tg}\,t \end{cases}$ являются

параметрическими уравнениями гиперболы.

Геометрический смысл параметра t выяснится в дальнейшем.

Подобным образом можно было бы положить $x = a \operatorname{Cos hip} t$ и получить $y = b \operatorname{Sin hip} t$.

Таким образом уравнения

$$\begin{cases} x = a \operatorname{Cos hip} t \\ y = b \operatorname{Sin hip} t \end{cases}$$

являются также параметрическими уравнениями гиперболы.

Уравнение гиперболы, отнесенной к ассимптотам

Если за оси координат принять ассимптоты гиперболы, то прежние координаты x и y выразятся через новые x_1 и y_1 по формулам

$$x = x_1 \operatorname{Cos} \varphi + y_1 \operatorname{Cos} \varphi$$
$$y = -x_1 \operatorname{Sin} \varphi + y_1 \operatorname{Sin} \varphi$$

Так как $\operatorname{Tg} \varphi = \frac{b}{a}$, то $\operatorname{Sin} \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

и $\operatorname{Cos} \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Таким образом $x = \frac{(x_1 + y_1)a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $y = \frac{(y_1 - x_1)b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

подставляя эти выражения в уравнение гиперболы, получим $x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ и, так как $a^2 + b^2 = c^2$, то, отбросив значки у переменных, получаем окончательное уравнение гиперболы, отнесенной к ассимптотам в виде

$$xy = \frac{c^2}{4}$$

Если левую и правую части этого уравнения умножить на $\operatorname{Sin} \omega$, то уравнение будет выражать тот факт, что площадь параллелограма, построенного на координатах любой точки гиперболы, является постоянной величиной (черт 30).

В силу этого гиперболу можно определить как г м. вершин равновеликих парвллелограмов, две стороны каждого из которых лежат на двух пересекающихся прямых

Радиус кривизны

Получим формулу для определения радиуса кривизны в любой точке гиперболы. Находим предварительно y' и y'', дифференцируя уравнение гиперболы

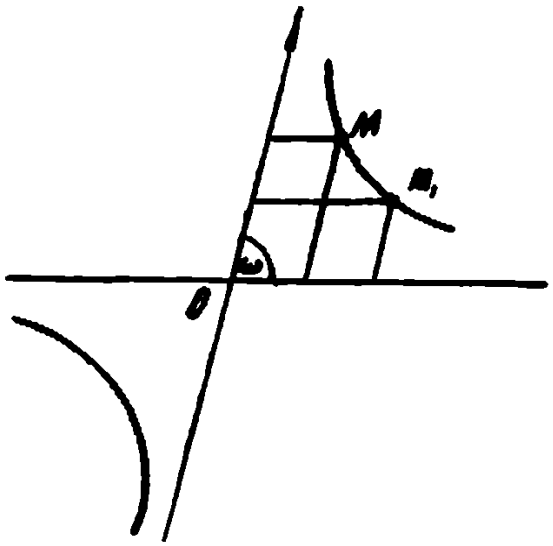
$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

тогда имеем

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{1/2}}{y''} = -\frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{a^4 b^4}.$$

Полученное выражение для R может быть записано в более компактной форме, после надлежащих преобразований

$$R = \frac{(rr_1)^{3/2}}{ab}$$



Чертеж 30

Очевидно, R_{min} получим при $y=0$ и $x=\pm a$, что соответствует вершинам гиперболы При возрастании „x"-са и „y"-ка радиус кривизны неограниченно возрастает и, следовательно, кривизна гиперболы стремится при этом к нулю

Заметив, что выражение для радиуса кривизны в вершине гиперболы $R_A = \frac{b^2}{a} = p$, можно быстро находить центр кривизны в этой точке. Для этого достаточно, очевидно, от точки A отложить вправо по действительной оси гиперболы отрезок, равный p; конец этого отрезка и будет искомым центром кривизны. Построение центра кривизны для любой точки гиперболы будет рассмотрено дальше.

Свойства касательной и нормали.

Остановимся на рассмотрении ряда свойств касательной к гиперболе. Обозначая координаты точки касания через

x_1 и y_1, получаем уравнение касательной в виде

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Отметим прежде всего важное свойство касательной к гиперболе, аналогичное свойству касательной к эллипсу. касательная к гиперболе делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами точки касания.

Доказательство этого свойства можно свести к доказательству того, что MT является биссектрисой угла M в треугольнике F_1MF, т. е., что $\frac{F_1T}{TF}=\frac{F_1M}{FM}$ (чертеж 31).

Замечаем, что

$$F_1T=c+OT$$

и

$$TF=c-OT,$$

но OT является абсциссой точки пересечения касательной с осью „x"-ов Полагая в уравнении касательной y=0, находим

$$x_1=OT=\frac{a^2}{x_1}.$$

Тогда

$$F_1T=c+\frac{a^2}{x_1}=\frac{a}{x_1}(ex_1+a)$$

и

$$TF=c-\frac{a^2}{x_1}=\frac{a}{x_1}(ex_1-a),$$

следовательно,

$$\frac{F_1T}{FT}=\frac{ex_1+a}{ex_1-a}=\frac{F_1M}{FM}$$

и т д

Нормаль MN делит пополам угол, смежный с углом, образованным фокальными радиусами-векторами. Эти свойства касательной и нормали к гиперболе дают возможность быстро строить эти линии для любой точки гиперболы Получим теперь формулу для определения угла γ, образованного касательной с фокальным радиусом-вектором. Из ΔF_1MF по формуле синуса половинного угла получаем

$$\operatorname{Sin}\gamma = \sqrt{\frac{(r_1 - r + 2c)(r - r_1 + 2c)}{4rr_1}} = \frac{b}{\sqrt{rr}}$$

Определим далее длины перпендикуляров FK и F_1K_1, опущенных из фокусов на касательные

Имеем из $\triangle$-ов MFK и MF_1K_1

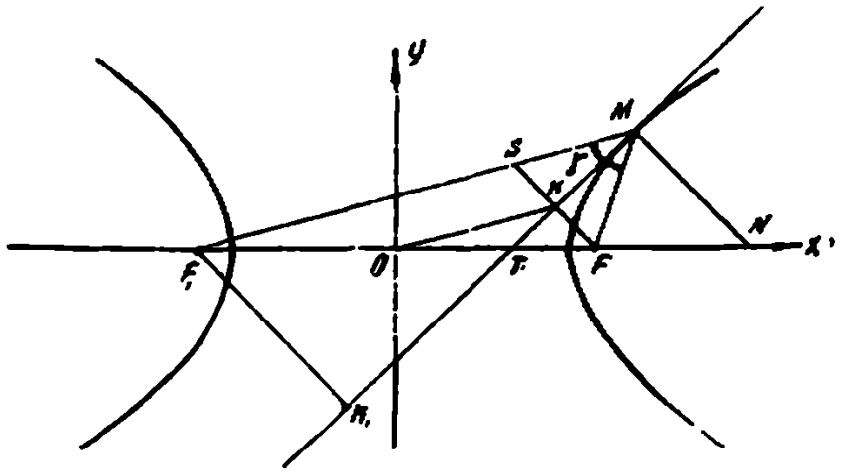
$$FK = r \operatorname{Sin}\gamma$$

и

$$F_1K_1 = r_1 \operatorname{Sin}\gamma$$

перемножая получаем. $FK \cdot F_1K_1 = rr_1 \operatorname{Sin}^2\gamma = rr_1 \frac{b^2}{rr_1} = b^2$

Таким образом произведение перпендикуляров, опущенных из фокусов на касательные, является для данной гиперболы величиной постоянной, равной квадрату ее мнимой полуоси



Чертеж 31

Определим расстояние OK от начала до основания перпендикуляра, опущенного из фокуса на касательную

Продолжим FK до точки S пересечения с F_1M; получившийся $\triangle SMF$ — равнобедренный и, следовательно, $MS = MF$ и $SK = KF$, но тогда, очевидно, $F_1S = F_1M - MS = F_1M - MF = 2a$, а прямая OK является средней линией $\triangle F_1FS$ и, следовательно, $OK = \frac{F_1S}{2} = \frac{2a}{2} = a$ Таким образом искомое расстояние OK оказалось величиной постоянной, не зависящей от координат точки касания Отсюда непосредственно следует, что основания перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные, лежат на окружности большого осевого круга гиперболы

Этим положением можно воспользоваться для построения гиперболы: возьмем прямой угол и будем двигать его так, чтобы вершина его двигалась по окружности начерченного круга, а одна из сторон при этом движении все время проходила бы через некоторую постоянную точку; тогда другая сторона будет огибать гиперболу.

Условие касания прямой $Ax+By+C=0$ и гиперболы. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ выражается соотношением

$$A^2a^2-B^2b^2=C^2$$

Г. м. точек из которых ветвь гиперболы видна под прямым углом, является окружностью с центром вначале и радиусом, равным $\sqrt{a^2-b^2}$. Очевидно, для равносторонней гиперболы при $b=a$ данная окружность обратится в точку и, наконец, при $a<b$ гипербола не будет иметь перпендикулярных касательных

Все эти положения доказываются совершенно так же, как это делалось в свое время для эллипса

Определим длину нормали гиперболы:

$$N=y\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}=$$

$$=\frac{b}{a^2}\sqrt{c^2x^2-a^4}=\frac{b}{a}\sqrt{(ex+a)(ex-a)}=\frac{b}{a}\sqrt{r_1r_2}$$

Воспользовавшись этим выражением, укажем общий способ нахождения центра кривизны гиперболы: Из точки N (чертеж 32) проводим $PK\perp MP$, а из точки $K-KC\perp MK$ Точка C будет центром кривизны для точки M данной гиперболы.

Действительно:

$$MC=\frac{KM}{\cos\angle KMP}, \quad \text{но } KM=\frac{MP}{\cos\angle KMP}; \text{ таким образом}$$

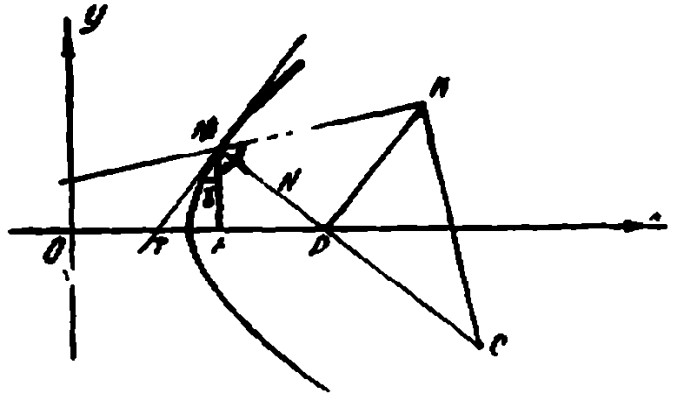
$$MC=\frac{MP}{\cos^2\angle KMP}=\frac{N}{\sin^2\gamma}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{r_1r_2}\ \frac{b^2}{r_1r_2}=\frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}=R$$

Итак MC есть радиус кривизны и, следовательно, C есть центр кривизны.

Сопряженные диаметры и их свойства.

К понятию сопряженных диаметров гиперболы мы приходим определяя г м. середин параллельных хорд ее Поступая точно так же, как это мы делали решая подобную эадачу для эллипса, приходим к выводу, что искомое г м. имеет уравнение: $y = \frac{b^2}{k a^2} x$, которое выражает прямую, проходящую через начало и, следовательно, является уравнением диаметра гиперболы Таким образом середины параллельных хорд лежат на одном иэ диаметров гиперболы, угловой коэфициент которого $k_1 = \frac{b^2}{ka^2}$. Так как последнее соотношение совершенно симметрично относительно k и k_1, то, очевидно, середины хорд, параллельные найденному диаметру, будут лежать на диаметре, угловой коэфициент которого $k = \frac{b^2}{a^2 k_1}$ и который таким образом параллелен ранее вэятым хордам



Чертеж 32

Два диаметра гиперболы, каждый иэ которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, наэываются взаимно сопряженными

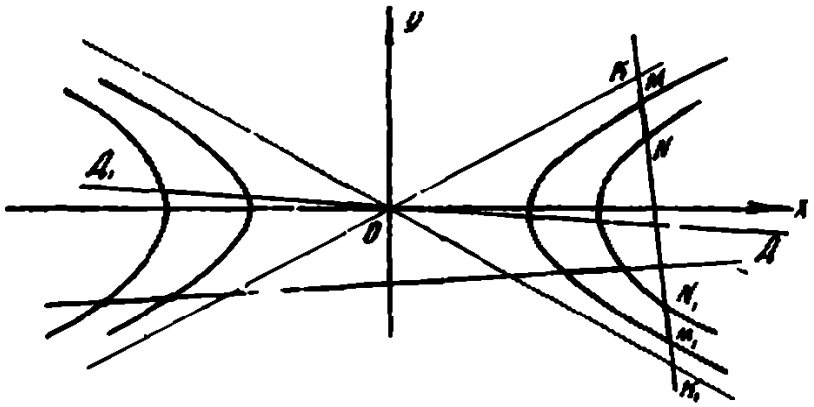
Угловые коэфициенты сопряженных диаметров связаны соотношением. $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$ Иэ этого соотношения видно что k и k_1 всегда одного энака и, следовательно, оба диаметра лежат или в 1-й и 3-й четвертях или во 2-й и 4-й, кроме этого при увеличении k_1 уменьшается k и наоборот, очевидно, при этом в некоторый момент, k_1 окажется равным K, оба диаметра сольются, имея угловой коэфициент $k = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a}$, т. е. обратившись в ассимптоту гиперболы. В силу этого обстоятельства ассимптоту гиперболы наэывают самосопряженным диаметром

Так как сопряженные диаметры лежат по разные стороны от ассимптоты, то один из них пересекает гиперболу в двух действительных точках, другой—в двух мнимых.

Сопряженные диаметры одной из сопряженных гипербол будут сопряженными и для другой, что непосредственно вытекает из соотношения $kk_1 = \frac{b^2}{a^2}$.

Очевидно, действительный диаметр одной из сопряженных гипербол будет мнимым для другой.

Если имеется семейство гипербол $\frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2\lambda^2} = 1$, имеющих, как было уже показано, общие ассимптоты, то и сопряженные диаметры этих гипербол будут общими для всего семейства, так как соотношение $kk_1 = \frac{b^2\lambda^2}{a^2\lambda^2} = \frac{b^2}{a^2}$



Чертеж 33

от λ не зависит. Учитывая это обстоятельство, мы можем отметить важное свойство семейства гипербол. отрезки MN и M_1N_1 общей хорды данного семейства гипербол, заключенные между ветвями двух любых гипербол, равны между собой

Действительно, если DD_1—диаметр, делящий пополам хорду MM_1 (чертеж 33), то он разделит пополам, согласно сделанному замечанию, и хорду NN_1, откуда и будет следовать равенство отрезков MN и M_1N_1 Так как систему ассимптот можно рассматривать как частный случай семейства гипербол (когда $\lambda = 0$), то, очевидно, и отрезки MK и M_1K_1 также равны между собой Таким образом отрезки любой прямой между гиперболой и ее ассимптотами равны между собой.

Так как касательную можно рассматривать как прямую, точки пересечения которой с гиперболой совпали, то

очевидно отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ассимптотами, делится в точке касания пополам.

Отсюда вытекает также, что касательная, проведенная через конец одного из сопряженных диаметров, будет параллельна другому (ибо она является одной из хорд семейства гипербол, через середину которой проходит данный диаметр).

Определим точки пересечения касательной с ассимптотами (чертеж 34), решая системы

$$\begin{cases} \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

Находим из 1-й системы $x = \frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}$ и $y = \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}$ — координаты точки P, а из 2-й — $x = \frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}$ и $y = -\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}$ — координаты точки P_1

Теперь нетрудно вычислить площадь $\triangle POP_1$ по координатам его вершин

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2b}{bx_1 - ay_1} & \frac{-a^2b}{bx_1 + ay_1} & 1 \\ \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} & \frac{-a^2b}{bx_1 + ay_1} & 1 \end{vmatrix} =$$

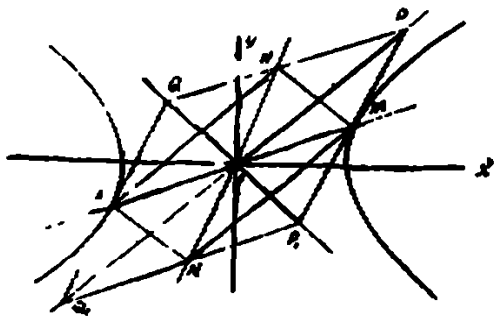
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^3b^3}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2} + \frac{a^3b^3}{b^2x^2 - a^2y^2}\right] = ab$$

Таким образом оказывается, что площадь треугольника, образованного касательной с ассимптотами, является для данной гиперболы величиной постоянной, равной площади прямоугольника, построенного на ее полуосях

Так как треугольник POP_1 (чертеж 34) является четвертой частью параллелограма PQQ_1P_1, построенного на сопряженных диаметрах MM_1 и NN_1, то площадь этого параллелограма равна $4ab$

Таким образом площадь параллелограма, построенного на сопряженных диаметрах гиперболы, является величиной постоянной, равной площади прямоугольника, построенного на осях этой гиперболы

Если точки M, N, M_1 и N_1, являющиеся серединами сторон этого параллелограма, соединить прямыми, то по чисто геометрическим соображениям следует, что полученная фигура MNM_1N_1 является параллелограмом, площадь которого равна 2ab Таким образом площадь параллелограма, построенного на прямых, проведенных через любую точку гиперболы параллельно ее ассимптотам, имеет постоянную величину, равную 2ab



Чертеж 34

Если вообразим систему сопряженных гипербол. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, то рассуждая совершенно так же, как это делалось при рассматривании соответствующих свойст эллипса *), мы получим соотношение: $a^2_1 - b_1^2 = a^2 - b^2$, где $2a_1$—длина диаметра, пересекающего основную гиперболу, а $2b_1$—длина сопряженного диаметра, пересекающего сопряженную гиперболу.

Таким образом разность квадратов сопряженных полудиаметров гиперболы равняется разности квадратов ее полуосей

Способы построения гиперболы.

Обратимся теперь к изложению различных способов построения гиперболы

1-й способ—основанный на определении гиперболы как геометрического места точек откладываем на координатных осях от начала действительные и мнимые полуоси данной гиперболы (чертеж 35).

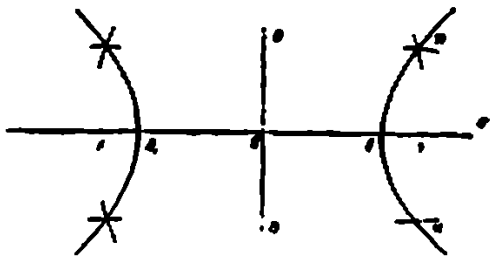
Для нахождения фокусов припоминаем соотношение. $c^2 = a^2 + b^2$, позволяющее рассматривать c—абсциссу фокуса, как гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого a и b В силу этого BA = c Сделав из точки O

*) Стр 32-ая

радиусом BA засечки на оси „x"-ов, получаем фокусы F и F_1 нашей гиперболы Зададимся далее произвольной, но лежащей справа от F, точкой N на оси „x"-ов и из фокусов F и F_1 описываем дуги радиусами AN и A_1N Точки M и M_1 пересечения этих дуг будут точками гиперболы. так как $F_1M - FM = A_1N - AN = 2a$ Задавшись следующей точкой N_1 на оси „x"-ов найдем подобным образом еще пару точек гиперболы и т д

2-й способ—построение по параметрическим уравнениям Имеем уравнения $x = a\,Sec\,t$; $y = b\,Tg\,t$,

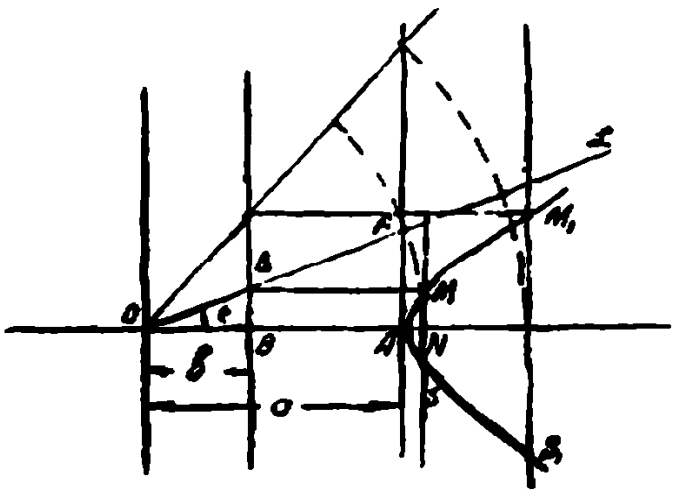
Из уравнений непосредственно видно, что абсциссу можно рассматривать как гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого острый угол t, а прилежащий к нему катет равен a; ордината же является катетом прямоугольного треугольника с углом t и прилежащим к нему катетом b.



Чертеж 35

Исходя из этих замечаний, производим следующее построение· откладываем на оси „x"-ов отрезки $OA = a$ и $OB = b$ (чертеж 36), через точки B и A проводим прямые, параллельные оси „y"-ов и, под произвольным углом t, проводим луч OL Тогда из $\triangle OA_1A$ имеем. $OA_1 = a\,Sec\,t = x$, а из $\triangle OB_1B$ имеем $BB_1 = b\,Tg\,t = y$.

Таким образом для построения точки гиперболы достаточно сделать на оси „x"-ов засечку радиусом, равным OA, провести через точку N параллель оси „y"-ов и через B_1—параллель оси „x"-ов Точка M встречи этих параллелей и будет точкой гиперболы Отложив NS, получаем симметрическую точку S Задаваясь новым углом t, мы получим, проведя подобное построение, еще пару точек и т. д

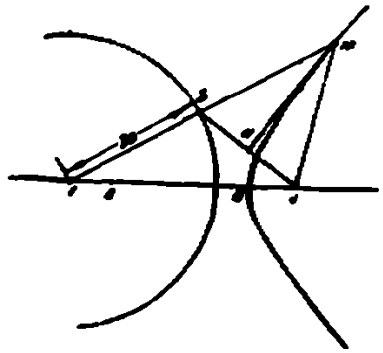


Чертеж 36

3-й способ—построение при помощи направляющего круга Опишем из фокуса F_1 окружность ради-

усом OS = 2a (чертеж 37) Возьмем на этой окружности точку S и соединяям ее с F и F_1 Через середину N отрезка SF проведем перпендикуляр NM до встречи его с продолжением F_1S в точке M. Точка M будет принадлежать гиперболе Действительно. $MF_1 - MF = MF_1 - MS = 2a$ Ясно, что таким образом можно построить сколько угодно точек гиперболы

Из построения непосредственно вытекает, что гиперболу можно рассматривать также, как геометрич. место точек, одинаково удаленных от данного круга и от данной точки F, лежащей вне этого круга, называемого направляющим



Чертеж 37

4-й способ -- построение гиперболы по ассимптотам и одной из точек.

Пусть M – точка гиперболы (чертеж 38). Проводим через M пучек прямых и, так как по доказанному выше отрезки любой прямой, заключенные между ассимптотами и гиперболой, равны между собой, то, откладывая $A_1N = AM$, $B_1P = BM$, $C_1S = CM$ и т д, мы замечаем, что точки N, S и P принадлежат гиперболе.

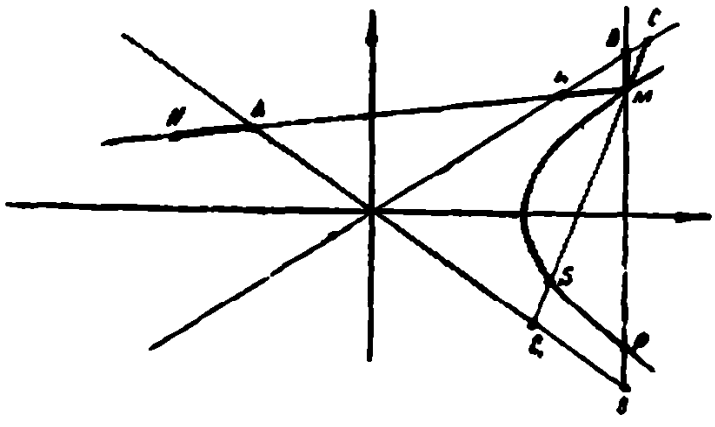
5-й способ — построение с помощью равновеликих параллелограмов

Пусть OX' и OY'—ассимптоты гиперболы (чертеж 39), а M -- некоторая точка ее.

Каждая следующая точка будет вершиной параллелограма, равновеликого параллелограму ONMP

Для построения одного из таких параллелограмов проводим луч OL, пересекающий MN в точке K. Проводим через K и L параллели ассимптотам Тогда параллелограм OCSQ будет равновелик парал-му ONMP и, следовательно, вершина его S будет точкой гиперболы.

Действительно, из подобных треугольн. OKQ и OLP имеем·



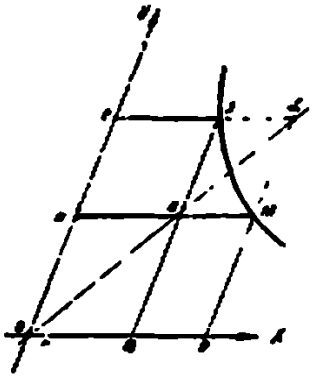
Чертеж 38.

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{LP}{KQ} = \frac{OC}{ON}, \quad \text{откуда} \quad OP\,ON = OQ\,OC$$

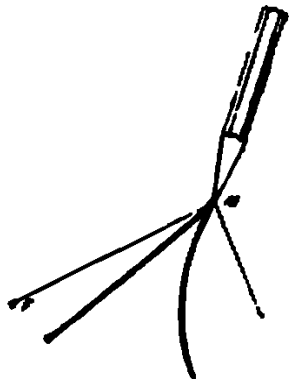
6-й способ—вычерчивание гиперболы непрерывным движением при помощи двух нитей

Закрепим в фокусах гиперболы концы двух нитей, разность между длинами которых равна действительной оси гиперболы (чертеж 40) Свяжем другие концы этих нятей Если теперь перекинуть нити через острие карандаша, одной рукой держать концы нитей, а другой, яатянув нити, двигать каранлаш, то острие его вычертит при этом движении гиперболу, так как во все время движения разность $MF_1 - MF$ будет оставаться постоянной

7-й способ—построение гиперболы при помощи линейки и нити



Чертеж 39



Чертеж 40

Один конец линейки упирается в фокус F_1, а к другому прикрепляется нить AMF, другой конец которой закреплен в фокусе F (чертеж 41). Разность между длиной линейки и длиной нити равна 2a Если острием карандаша, касающимся ребра линейки натянуть нить, а эатем вращать линейку около точки F_1, оставляя все время острие карандаша касающимся ребра линейки, то карандаш вычертит гиперболу Действительно, эа все врема движения разность $MF_1 - MF$ остается постоянной, равной 2a

Построение касательных к гиперболе.

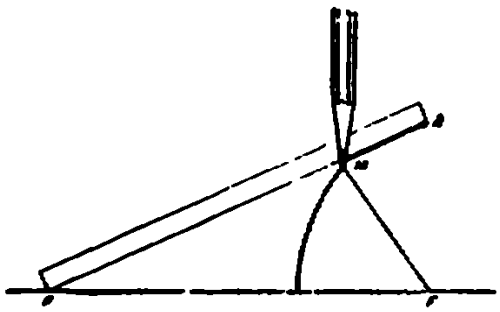
Построение касательной к гиперболе в данной на ней точке сводится, как мы это уже видели, к построению биссектрисы угла M в $\triangle F_1MF$.

Построение это может быть выполнено также при помощи ассимптот следующим образом

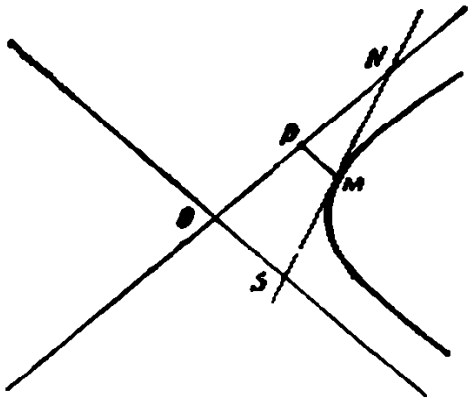
Проводим MP параллельно левой ассимптоте и от точки P откладываем отрезок PN = OP (чертеж 42). Тогда прямая NS будет искомой касательной к нашей гиперболе в данной на ней точке M. Действительно, при этом построении прямая NS делится в точке M пополам, но этим свойством обладает касательяая

Построение касательной к гиперболе из точки, лежащей вне кривой, производится следующим образом.

Пусть S—внешняя точка, из которой необходимо провести касательную к гиперболе (чертеж 43.) Из точки F_1 проводим окружность радиусом 2a, а из данной точкя S—окружность радиусом SF Точку N пересечения этих ок-



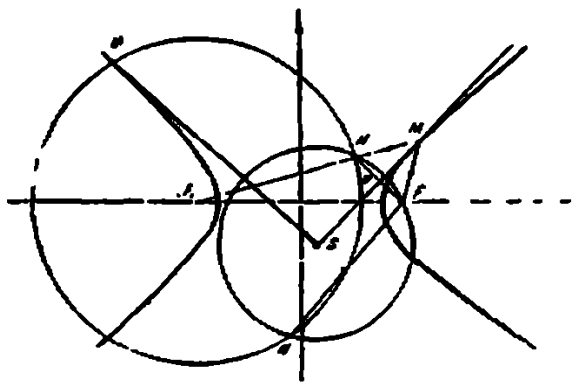
Чертеж 41



Чертеж 42

ружностей соединяем с F. Через данную точку S проводим прямую SM ⊥ NF; эта прямая и будет искомой касательной.

Действительно так как MN = MF (что следует из того, что △NMF—равнобедренный), то $MF_1 - MN = 2a = MF_1 - MF$ и, следовательно, точка M действительно лежит на гиперболе С другой стороны, MP является биссектрисой угла в M △NMF; это и показывает окончательно, что SM является касательной.



Чертеж 43

Так как аналогичное построение можно провести для второй точки N_1 пересечения окружностей, то получится еще одна касательная SM_1

Равносторонняя гипербола.

Остановимся особо ва одном частном случае—на так называемой **равносторонней гиперболе**.

Уравнение ее получим полагая $b=a$ в общем уравнении гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,$$

или

$$x^2-y^2=a^2.$$

Все свойства, которые были показаны для равносторонней гиперболы, будут, очевидно, справедливы и для равносторонней, но наряду с этим равносторонняя гипербола будет обладать некоторыми особенностями.

Заметим прежде всего, что астрономический эксцентриситет равносторонней гиперболы $e=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}.$

Уравнения ассимптот для равносторонней гиперболы принимают вид:

$$y=\pm\frac{a}{a}x \text{ или } y=\pm x,$$

откуда видно, что ассимптоты являются биссектрисами координатных углов и оказываются, таким образом, **взаимно перпендикулярными**.

Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенное к ассимптотам, имеет вид:

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

Очевидно, аналогично общему случаю, равностороннюю гиперболу можно рассматривать как геометрическое место вершин равновеликих прямоугольников, две стороны которых лежат на ассимптотах.

Нетрудно убедиться, что **длина нормали в любой точке равносторонней гиперболы равна радиусу-вектору этой точки**.

Действительно:

$$N=y\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=r.$$

Это соотношение позволяет быстро строить нормаль, а, следовательно, и касательную в любой точке равносторонней гиперболы

Определяя длину подкасательной и касательной для любой точки равносторонней гиперболы, отнесенной к асимптотам, заметим, что длина подкасательной S_T равна $|x|$—абсциссе точки касания, взятой по абсолютной величине, а касательная T равна r—радиус-вектору точки касания.

Этими соотношениями также удобно пользоваться при построении касательной и нормали к равносторонней гиперболе.

Выражение для радиуса кривизны равносторонней гиперболы примет вид

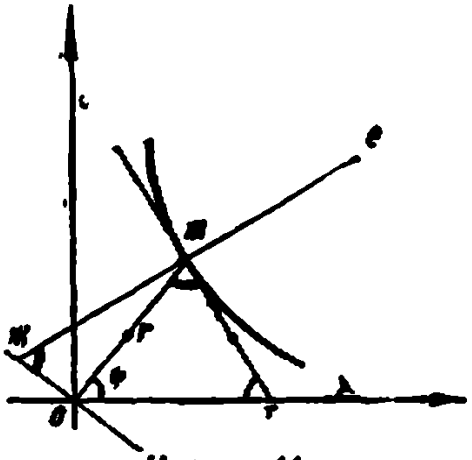
$$R = \frac{(a^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{a^3}$$

или

$$R = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{a^3},$$

так как $x^2 + y^2 = r^2$, то полученному выражению можно придать более простой вид:

$$R = \frac{r^3}{a^2}.$$



Чертеж 44

Если гипербола отнесена к ассимптотам, то a^2 можно заменить через $2xy$ и, так как $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, где φ—полярный угол, то

$$R = \frac{r}{\sin 2\varphi}.$$

Исходя из этого, можно дать следующий способ построения центра кривизны равносторонней гиперболы в точке M. Проводим радиус-вектор OM (черт. 44) и из M делаем на оси „x"-ов засечку радиусом $MT = OM$, тогда MT будет касательной, как это мы видели выше. Проводим далее нормаль и через начало проводим $OK \perp OM$; тогда MK будет радиусом кривизны в точке M.

Действительно $$MK = \frac{r}{\sin \angle MKO} = \frac{r}{\sin \angle OMT} =$$

$$= \frac{r}{\sin (180 - 2\varphi)} = \frac{r}{\sin 2\varphi} = R.$$

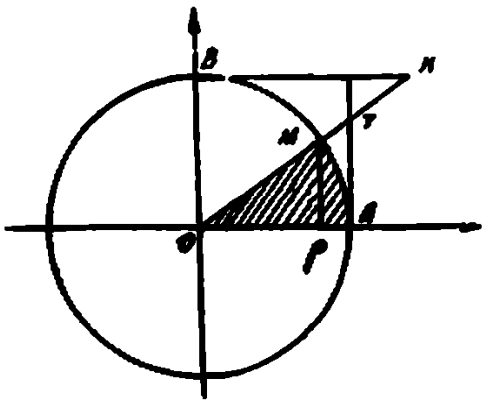
Для нахождения центра кривизны откладываем по нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MC = MK. Тогда точка C—центр кривизны данной гиперболы в точке M.

Заметим в заключение, что подобно тому, как тригонометрические функции выражаются отрезками MP, OP, AT и BK в круге с радиусом, равным единице (чертеж 44), так соответственные отрезки, отнесенные к равносторонней гиперболе

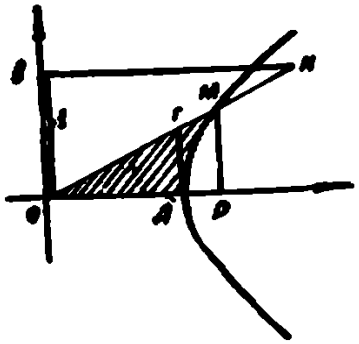
$$x^2 - y^2 = 1$$

выражают гиперболические функции

И так же, как аргумент тригонометрических функций можно рассматривать как удвоенную площадь кругового сектора OMA (чертеж 45), так аргументом гиперболических функций является удвоенная площадь гиперболического сектора OMA (чертеж 46)



Чертеж 45



Чертеж 46

MP = Sin t, OP = Cos t

AT = Tg t; BK = Ctg t,

где t—удвоенная площадь сектора OMA

MP = Sin hip t; OP = Cos hip t

AT = Tg hip t; BK = Ctg hip t,

где t — удвоенная площадь сектора OMA

Если определить площадь, заключенную между дугой гиперболы xy = 1, осью „x"-ов и ординатами x = 1 и $x = x_1$,

то получим $$U = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} = \ln x_1$$

Как видно, площадь эта выражается натуральным логарифмом. В силу этого натуральные логарифмы называются также гиперболическими

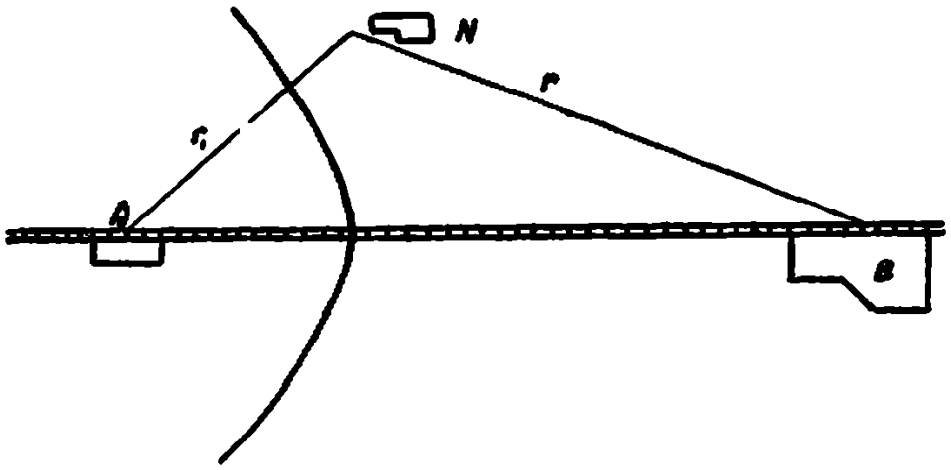
Применения гиперболы.

1. Область влияния железнодорожной станции.

С гиперболой можно встретиться в вопросе определения так называемой области влияния железнодорожных станций.

Предположим, что на линии ж д. расположена станция А, а на расстоянии d км от нее—город В (чертеж 47). Грузы из пунктов, прилегающих к линии ж. д, могут направляться в город или непосредственно гужом или—гужом до ст. А, а затем по ж д. до города

Пусть стоимость перевозки одной тонны груза гужом равна a, а по ж. д —b за каждый километр. Положим, что



Чертеж 47

некоторый пункт N расположен в r км от города В и в r_1 км от станции А.

Очевидно, стоимость провоза одной тонны гужом из пункта N в город В равна ar, а стоимость провоза той же тонны до города через станцию А, т е сначала гужом, а затем по ж. д., равна $ar_1 + bd$

Отсюда ясно, что если $ar < ar_1 + bd$, то груз выгоднее везти гужом, если же $ar > ar_1 + bd$, то выгоднее отправить его через ст. А. Но, очевидно, могут существовать пункты, для которых

$$ar = br_1 + bd \qquad (1)$$

Это—пункты, лежащие на линии безразличия, отделяющей район, тяготеющий в транспортном отношении к ст А.

И так как из соотношения (1) следует

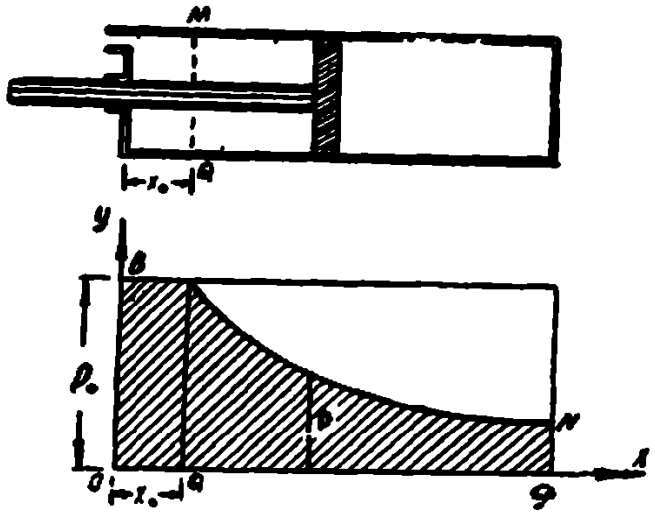
$$r - r_1 = \frac{bd}{a} = \text{const},$$

то линией, ограничивающей область влияния станции, является гипербола.

2 Изотермическая кривая

Диаграмма мощности. Целый ряд зависимостей, рассматриваемых в физике и технике, графически выражается гиперболой.

Так, например, правая ветвь равносторонней гиперболы, отнесенной к ассимптотам, является графиком зависимости между объемом v газа и давлением его p при пост. t (закон Бойля—Мариотта $pv = \text{const}$ изометрическая кривая).



Чертеж 48.

Кривая расширения пара в цилиндре паровой машины является также равносторонней гиперболой. Нужно заметить, что пар подается в цилиндр не в течение всего хода поршня, а после некоторого продвижения его „отсекается“ В результате этого давление пара на поршне с момента отсечки начинает уменьшаться, ибо объем, заполняемый им, увеличивается благодаря дальнейшему продвижению поршня

Пусть в момент отсечки давление на поршень равнялось p_0, а расстояние, пройденное поршнем до отсечки, было x_0 (чертеж 48) Тогда, считая радиус цилиндра равным r, заметим, что объем, занимаемый паром в момент отсечки, равен $\pi r^2 x_0$, Через некоторое время после отсечки поршень продвинется вперед, объем, занимаемый паром, увеличится и будет равен $\pi r^2 x$

Если обозначить давление пара в некоторый следующий за отсечкой момент через p, то согласно закона Б. М. получаем $p\, p_0 = \pi r^2 x_0\ \pi r^2 x$, откуда $px = p_0 x_0 = \text{const}$.

Графически этот процесс изображается таким образом на оси „y“-ов откладывается отрезок $OB = p_0$—давлению

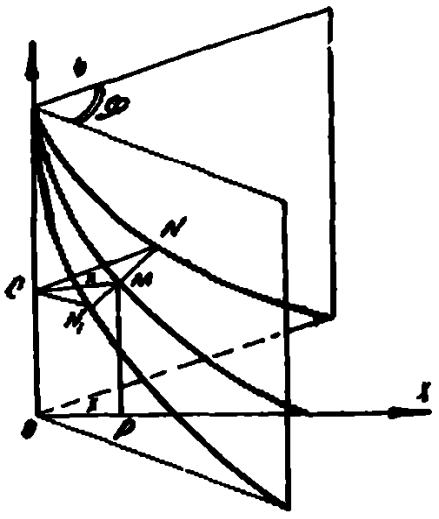
в момент отсечки, а по оси „x"—отрезок $OQ = x_0$ и $OP =$ длине цилиндра. Тогда точка $M(x_0\ p_0)$ будет первой точкой гиперболы.

Построение других точек можно провести по одному из способов, указанных выше.

Площадь фигуры MNPQ геометрически характеризует величину работы, произведенной паром за время одного хода поршня, и называется **диаграммой мощности.**

3. Гипербола в области физики.

Рассмотрим одно явление из области физики, в котором нам опять-таки придется встретиться с гиперболой.



Чертеж 49

Вообразим две близкие друг к другу параллельные пластинки, погруженные в жидкость. Вследствии капиллярности уровень жидкости между этими пластинками будет выше уровня жидкости в сосуде. Из физики известно, что высота h подъема жидкости будет обратно пропорциональна расстоянию d между этими пластинками и прямо пропорциональна некоторому коэфициенту „c", зависящему от поверхностного натяжения данной жидкости и ее плотности. Таким образом $h = \frac{c}{d}$.

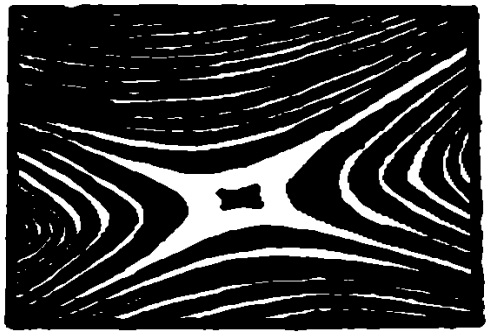
Представим себе, что в некоторую жидкость перпендикулярно к ее поверхности погружены пластинки, образующие между собой двугранный угол φ (чертеж 49) Высота поднятия различных точек поверхности жидкости, заключенной между этими пластинками, будет различна, ибо d будет зависеть от места нахождения каждой точки этой поверхности.

Поставим себе задачу определить вид кривой, по которой рассекается поднявшаяся поверхность жидкости между пластинками плоскостью XOY, являющейся биссектрисой двугранного угла φ. Пусть M(x, y) некоторая точка этой кривой Очевидно, согласно формулы $h = \frac{c}{d}$, получим $y = \frac{c}{NN_1}$, но $NN_1 = 2x\ \mathrm{Tg}\frac{\varphi}{2}$, как это следует из

$\triangle CNN_1$, тогда $y = \dfrac{c}{2x\,Tg\dfrac{\varphi}{2}}$, или $xy = const.$

Полученное уравнение показывает, что искомая кривая является гиперболой.

Семейство сопряженных гипербол можно наблюдать при явлении интерференции в стеклянной пластинке, подверженной давлению (чертеж 50).



Чертеж 50

В космическом пространстве гипербола осуществляется непосредственно как траектория некоторых комет и метеоритов.

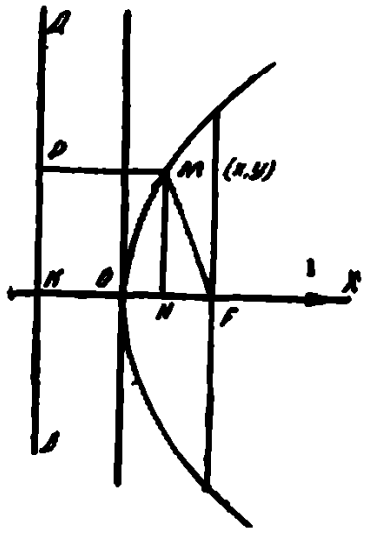
ПАРАБОЛА.

Вывод уравнения и исследование формы.

Парабола является геометрическим местом точек, каждая из которых одинаково удалена от данной точки и от данной прямой.

Пусть F—данная точка.

DD_1—данная прямая (чертеж 51) Опускаем из F перпендикуляр на DD_1, длину его FK полагаем равной p



Чертеж 51.

Прямую KF принимаем за ось „x"-ов а перпендикуляр к ней, проходящий через середину FK, за ось „y"-ов.

Пусть точка M (x, y) принадлежит параболе.

Согласно определения параболы имеем

$$MF = MP \text{ или } \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = x+\frac{p}{2};$$

после упрощений получаем· $y^2 = 2px$ это и есть простейшее уравнение параболы.

Из уравнения отчетливо видно, что кривая симметрична оси „x"-ов. При неограниченном возрастании „x"-са „y" также неограниченно растет, таким образом ветви кривой уходят в бесконечность.

Отрицательных значений „x" принимать не может, ибо при этом „y" становится мнимым, следовательно, вся кривая лежит справа от оси *).

Основные элементы параболы.

Ось симметрии называется осью параболы

Точка O—вершина параболы.

Точка F—фокус параболы.

Хорда M_1M_2, проходящая через фокус перпендикулярно к оси, называется фокальной хордой.

*) Предполагается, что $p > 0$

Длина фокальной хорды, как легко убедиться, равна 2p

Величину p называют параметром параболы. С геометрической точки зрения параметр является фокальной ординатой параболы.

Прямая MF, соединяющая любую точку параболы с ее фокусом, называется фокальным радиусом-вектором, обозначаемым через r.

Очевидно $r = MF = MP = x + \frac{p}{2}$.

Заметим наконец, что эксцентриситет параболы равен единице. Оправдание этого положения будет дано ниже при выяснении общих свойств конических сечений

В отличие от эллипса и гиперболы, парабола не имеет центра. Но параболу можно рассматривать как предельную форму эллипса, большая ось которого неограниченно возрастает и, следовательно, центр и один из фокусов которого удаляется в бесконечность. При таком понимании можно заметить, что центр и один из фокусов параболы лежат в бесконечности

Свойства касательной к параболе.

Обратимся к изучению многих свойств параболы и остановимся прежде всего на свойствах ее касательной. Так как дифференцируя уравнение параболы получаем $y' = \frac{p}{y}$, то уравнение касательной в некоторой точке $M(x_1, y_1)$ принимает вид

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

Если угол, составляемый касательной с осью „x"-ов, назвать α, то $\operatorname{Tg}\alpha = \frac{p}{y}$ и, следовательно, при $y \to \infty$ $\alpha \to 0$, таким образом, касательная в точке M по мере удаления последней от вершины параболы стремится стать параллельной оси „x"-ов В этом одно из отличий параболы от гиперболы, у которой касательная стремится совпасть с ассимптотой Если провести касательные в концах фокальной хорды $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ и $M_2\left(\frac{p}{2}, -p\right)$, то $\operatorname{Tg}\alpha = \pm 1$ и, следовательно, $\alpha_1 = 45°$ и $\alpha_2 = 135°$, откуда

следует, что касательные к параболе, проведенные в концах фокальной хорды, взаимно перпендикулярны.

Определяя подкасательную и поднормаль параболы получаем

$$S_T = \frac{y}{y'} = y\,\frac{p}{y} = \frac{y^2}{p} = 2x,$$

$$S_N = yy' = y\,\frac{p}{y} = p$$

Таким образом оказывается, что подкасательная параболы равна удвоенной абсциссе точки касания, а поднормаль параболы является величиной постоянной, равной ее параметру.

Обоими этими положениями можно пользоваться при построении касательной и нормали к параболе

Теперь удобно показать главное свойство касательной к параболе касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом-вектором и лучом, проведенным через точку касания параллельно оси „x"-ов

Действительно из $\triangle MFT$ (чертеж 52) имеем

$$MF = x + \frac{p}{2}$$

и

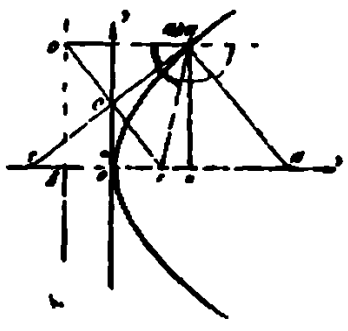
$$TF = TO + OF = \frac{TK}{2} + OF = \frac{S_T}{2} + OF = x + \frac{p}{2}$$

Таким образом $\triangle MFT$ — равнобедренный и следовательно $\angle MTF = \angle MFT$, откуда непосредственно вытекает: $\angle PMT = \angle FMT$.

Луч MP можно рассматривать как фокальный радиус-вектор, уходящий к фокусу параболы, лежащему в бесконечности При этом условии только что полученное свойство оказывается вполне аналогичным соответствующему свойству касательной к эллипсу.

Нормаль к параболе будет составлять равные углы с фокальным радиусом-вектором и продолжением в обратную сторону луча MP

Покажем далее, что основания перпендикуляров, опущенных из фокуса на касатель-



Чертеж 52

ные, лежат на касательной в вершине параболы.

Опустим из F перпендикуляр на касательную и продолжим его до пересечения с директрисой. Тогда по свойству касательной

$$CP = CF,$$

но с другой стороны

$$DO = OF,$$

откуда следует, что OC является средней линией в тр-ке DPF. и т к. $PD \perp DX$, то и $CO \perp OX$, следовательно, OC действительно является касательной, и высказанное положение так. обр доказано.

Здесь опять можно установить интересную аналогию с эллипсом основания перпендикуляров, опущенных из фокусов на касательные к эллипсу, лежат на окружности круга, описанного около этого эллипса; для бесконечно вытянутого эллипса эта окружность обращается в прямую, касательную к вершине.

Совершенно подобно этому направляющий круг эллипса обращается в директрису параболы

Если прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$. то коэф-ты и свободные члены в уравнениях данной прямой, и касательной к параболе должны быть пропорциональны, т. е.

$$\frac{1}{y'} = \frac{k}{p} = \frac{b}{px_1},$$

откуда и получаем соотношение $2bk = p$, являющееся условием того, что данная прямая касается параболы.

Воспользовавшись этим условием, определим г м. точек, из которых парабола видна под прямым углом.

Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$—координаты некоторой точки искомого геом места. Уравнение прямой, проходящей через точку $(\bar{x}, \bar{y})$, примет вид:

$$y - \bar{y} = k(x - \bar{x})$$

или

$$y = kx + \bar{y} - k\bar{x}$$

и так как эта прямая должна касаться параболы, то согласно условия касания получаем $2(\bar{y} - k\bar{x})k = p$ или $2\bar{x}k^2 - 2\bar{y}k + p = 0$.

Это уравнение даст два значения для k соответственно двум касательным, которые можно провести к параболе из точки $(\bar{x}\ \bar{y})$, и так как по условию эти касательные должны

быть перпендикулярны, то $k_1 k_2 = -1$, но по свойству корней кв. уравнения $k_1 k_2 = \frac{P}{2\bar{x}}$.

Т. о $\frac{P}{2\bar{x}} = -1$ откуда $\bar{x} = -\frac{P}{2}$

Итак геометр место точек, из которых парабола видна под прямым углом, является директрисой этой параболы

Радиус кривизны параболы. Эволюта.

Определяя радиус кривизны параболы получаем.

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{3/2} - \frac{p^2}{y^3} = \frac{(y^2+p^2)^{3/2}}{-p^2}$$

Из полученного выражения видно, что по мере удаления от вершины радиус кривизны параболы неограниченно возрастает, в самой же вершине при $y=0$ получаем $R=p$, т. о. радиус кривизны в вершине параболы равен ее параметру. (фокальной хорде).

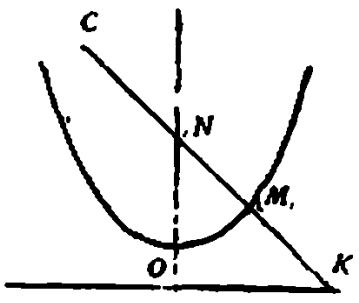
Так как нормаль к параболе

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{y^2+p^2},$$

то выражению радиуса кривизны можно придать более компактный вид

$$R = \frac{N^3}{P^2}$$

Покажем, что радиус кривизны параболы равен удвоенному отрезку нормали, считаемому от точки касания до точки пересечения продолжения нормали с директрисой.



Чертеж 53

Для доказательства этого положения удобно принять директрису параболы за ось „x"-ов. а ось симметрии—за ось „y"-во При этом условии уравнение параболы примет вид:

$$x^2 = 2p\left(y - \frac{P}{2}\right)$$

или

$$y=\frac{x^2+p^2}{2p}$$

Очевидно тогда

$$y'=\frac{x}{p} \quad \text{и} \quad y''=\frac{1}{p}$$

и, следовательно

$$N=MK=y\sqrt{1+y'^2}=y\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}=y\sqrt{\frac{2y}{p}}$$

и

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=p\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)=2y\sqrt{\frac{2y}{p}}$$

Т о действительно

$$R=2MK=2N.$$

Это соотношение дает весьма простой способ нахождения центра кривизны для любой точки параболы. Достаточно продолжить нормаль в данной точке до пересечения ее с директрисой и отложить отрезок $MC=2MK$ (черт. 53); точка C и будет искомым центром кривизны.

К о о р д и н а т ы ц е н т р а к р и в и з н ы параболы

$$\xi=x-y'\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=x-\left[\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)-\frac{p^2}{y^3}\right]=3x+p$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\left[\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)-\frac{p^2}{y^3}\right]=\frac{y^3}{p^2}=\left(\frac{2x}{p}\right)^{3/2}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases}\xi=3x+p\\ \eta=\left(\dfrac{2x}{p}\right)^{3/2}\end{cases}$$

выражает в параметрической форме уравнение э в о л ю т ы параболы, являющейся п о л у к у б и ч е с к о й п а р а б о л о й, на исследовании формы которой мы остановимся в дальнейшем

Свойства нормалей параболы.

Докажем еще некоторые свойства нормалей, проведенных к параболе из некоторой точки A (a, b) лежащей вне ее

Уравнение нормали к параболе в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

Очевидно, точку $M(x_1, y_1)$ можно считать концом нормали.

Если нормаль проходит через точку $A(a, b)$, то координаты (a, b) удовлетворяют уравнению нормали

$$b - y_1 = -\frac{y_1}{p}(a - x_1),$$

но так как точка M лежит на параболе, то $y_1^2 = 2px_1$.

Решая систему:

$$\begin{cases} b - y_1 = -\dfrac{y_1}{p}(a - x_1) \\ y_1^2 = 2px_1 \end{cases} \qquad (1)$$

мы получим 2 пары корней, соответствующих 2-м точкам параболы, через которые пройдут две нормали, проведенные к параболе из точки $A(a, b)$.

Но решая систему (1), мы, если считать x_1 и y_1 величинами переменными, определяем точки пересечения параболы $y_1^2 = 2px$, и кривой $b - y_1 = -\dfrac{y_1}{p}(a - x_1)$

Таким образом, концы нормалей лежат на кривой

$$b - y_1 = -\frac{y_1}{p}(a - x_1)$$

или

$$x_1 y_1 + (p - a) y_1 - pb = 0$$

Последнее уравнение является у-нием так называемой гиперболы Аполлония.

Итак. концы нормалей, проведенных к параболе из точки, лежащей вне ее, находятся на гиперболе.

Но концы нормалей будут также лежать на кривой

$$x^2 + (p - a)x - \frac{b}{2}y = 0,$$

уравнение которой получится, если в уравнении гиперболы Аполлония заменить p через $\dfrac{y^2}{2x}$, что следует из у-ния данной параболы

Последняя кривая является параболой с осью перпендикулярной к оси нашей параболы

Таким образом, концы нормалей являются также точками пересечения параболы

$$x^2+(p-a)x-\frac{b}{a}y=0$$

и данной параболы $y^2=2px$

Складывая эти уравнения, получим

$$x^2+y^2-(p+a)x+\frac{b}{2}y=0,$$

которое выражает окружность, проходящую через вершину данной параболы

Таким образом, концы нормалей, проведенных к параболе из точки, лежащей вне ее, лежат на окружности, проходящей через вершину этой параболы

Последнее предложение известно под названием теоремы Иоахимсталя

Диаметры параболы.

Диаметром параболы называется любая прямая, параллельная оси этой параболы

Можно быстро убедиться, что диаметр параболы является геом местом середин параллельных хорд этой параболы.

Действительно пусть $y=kx+c$ — уравнение параллельных хорд

Решая его совместно с у-нием параболы, желая найти координаты концов хорды, мы получим после подстановки

$$y^2-2\frac{p}{k}y+\frac{2pc}{k}=0$$

Откуда, на основании свойств корней кв у-ния, имеем $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p}{k}$, таким образом ордината середины любой хорды $y=\frac{p}{k}$.

Из этого видно, что ордината середины хорды не зависит от C и является таким образом для всех хорд величиной постоянной.

Отсюда следует, что г. м середин параллельных хорд параболы является прямой, параллельной оси этой параболы.

Очевидно, уравнение этой прямой: $y = \frac{p}{k}$

Эту прямую и называют диаметром параболы сопряженным хордам с угловым коэфициентом k.

При $k = \infty$ получаем уравнение диаметра $y = 0$, диаметр в этом случае совпадает с осью параболы, таким образом, ось параболы является диаметром ее, перпендикулярным к сопряженным ему хордам.

Через точку (x_1, y_1) на параболе проведем к ней касательную и диаметр.

Очевидно, уравнение касательной

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

и уравнение диаметра: $y = y_1$

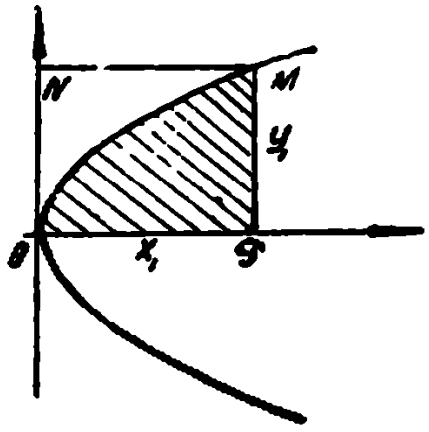
Но так как общее уравнение диаметра параболы имеет вид $y = \frac{p}{k}$, то для нашего случая $\frac{p}{k} = y_1$, откуда

$$k = \frac{p}{y_1}.$$

Таким образом, касательная к параболе, проходящая через конец диаметра этой параболы, будет параллельна хордам, сопряженным данному диаметру.

Это свойство совершенно аналогично соответствующему свойству эллипса.

Площадь, длина дуги, объем тела вращения и т. п.



Чертеж 54

Площадь, ограниченная дугой параболы, ее осью и некоторой ординатой, выразится следующим образом

$$U = \int_0^{x_1} \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1$$

Таким образом, оказывается, что

искомая площадь составляет $^2/_3$ площади прямоугольника, у которого основание является абсциссой, а высота ординатой точки M. Можно сказать также, что дуга параболы делит площадь прямоугольника на две части, из которых одна в два раза больше другой (черт. 54).

Остановимся на рассмотрении одного свойства параболы, применяемого для приближенного вычисления площадей.

Определим площадь ограниченную параболой $y = ax^2 + bx + c$.
и ординатами ее

$$x = 0 \qquad \text{и} \qquad x = 2h.$$

Имеем:

$$U = \int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{8}{3}\,ah^3 + 2bh^2 + 2ch$$

Выразим коэфициенты a, b и c через y_0, y_1 и y_2—ординаты; соответствующие абсциссам 0, h и 2h.

Имеем:

$$c = y_0 \qquad\qquad c = y_0$$

$$ah^2 + bh + c = y_1 \qquad\qquad a = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$$

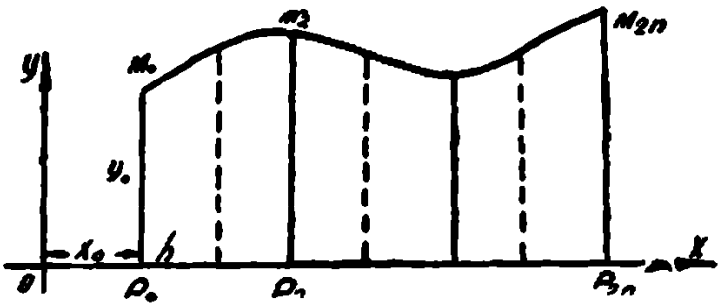
откуда:

$$4ah^2 + 2bh + c = y_2 \qquad\qquad b = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h}$$

Тогда, после подстановки и упрощений, получим выражение для нашей площади·

$$U = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Подобное выражение для площади параболы получится и в том случае, когда начальная ордината не будет совпадать с осью $y_{-\infty}$, ибо всегда можно, сделав параллельный перенос оси y, свести дело к рассмотренному случаю, а в результате такого переноса не изменится ни сама площадь, ни ординаты y_0, y_1 и y_2.



Чертеж 55

Предположим теперь, что нам необходимо определить площадь фигуры ограниченной некоторой кривой $M_0 M_{2n}$ осью x_{-os} и ординатами y_0 и y_{2n} (черт. 55).

Разобъем интервал $P_0 P_{2n}$ на 2n равных частей и в точках деления проведем ординаты $y_1, y_2, \ldots\ldots y_{2n-1}$.

Пусть длина одной части равна h. Будем считать теперь нашу площадь состоящей из площадей, ограниченных дугами $M_0 M_2$, $M_2 M_4$ и т. д.

Если каждая из этих дуг является дугой параболы, то мы сможем совершенно точно подсчитать искомую площадь, как сумму площадей ее отдельных частей, каждая из которых определяется по выше полученной формуле площади параболы. Таким образом, вся искомая площадь

$$U = \frac{h}{6}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})]$$

Если же дуги нашей кривой не являются дугами параболы, то полученное выражение даст лишь приближенное выражение площади, которое будет тем точней, чем на большое число частей разделен интервал $P_0 P_{2n}$.

Таким образом, полученная формула, носящая наэвание формулы Симпсона, может быть использована для приближенного вычисления площадей, при этом можно и не знать самого уравнения кривой, достаточно если кривая будет задана графически или значениями ординат $y_0\ y_2,\ y_4 \ldots y_{2n}$

Очевидно, сущность применения формулы Симпсона состоит в замене дуги любой кривой — дугой параболы.

Объем параболоида вращения—тела полученного от вращения параболы вокруг ее оси выражается следующим образом.

$$V = 2p\pi \int_0^{x_1} x\,dx = \pi p x_1^2 = \frac{1}{2}\pi y_1^2 x_1$$

Таким образом объем параболонда равен половине объема цилиндра, имеющего высоту равную абсциссе, а радиус основания—равный ординате точки $M(x_1, y_1)$ параболы.

Следовательно, если площадь сечения параболонда, соответствующую абсциссе x_1, обозначить через S, а самое абсциссу через H, то объем параболонда определится по формуле $V = \frac{1}{2} SH$.

Объем V усеченного параболонда CEFD (чертеж 56) можно рассматривать как разность объемов V_1 и V_2 двух полных параболондов ODF и OCE. Таким образом

$$V = V_2 - V_1 = \frac{S_2 . OB}{2} - \frac{S_1 . OA}{2}$$

Если обозначить высоту AB данного усеченного параболонда через H, OA через h, то OB будет равно h + H

Площадь S_1 сечения A будет равна $2p\pi h$, площадь S_2 сечения B равна $2p\pi(H+h)$.

Тогда искомый объем

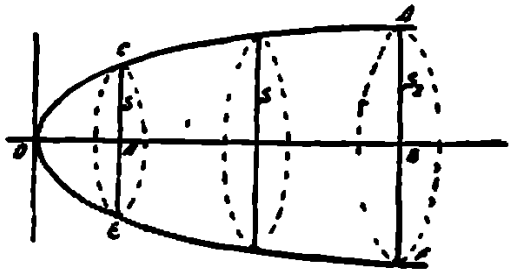
$$V = \frac{2p\pi(H+h)(H+h) - 2p\pi h\, h}{2} =$$

$$= (H^2 + 2Hh)\, p\pi = 2p\left(\frac{H}{2} + h\right) H.$$

Но $2p\left(\frac{H}{2} + h\right)$ есть площадь S среднего сечения нашего параболонда

Тогда для объема усеченного параболонда получаем простую формулу

$$V = S . H.$$



Чертеж 56

Таким образом объем усеченного параболонда равен произведению площади его среднего сечения на высоту.

Формулой этой особенно часто пользуются в лесном деле при определении объема ствола деревьев.

При определении длины дуги параболы удобнее, для целей интегрирования, взять ее уравнение в виде:

$$x^2 = 2py.$$

Тогда длина дуги S, считаемая от вершины параболы до некоторой точки $M(x_1, y_1)$, выразится по формуле.

$$S=\frac{1}{p}\int_0^{x_1}\sqrt{x^2+p^2}\,dx=\frac{x_1}{2p}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}$$

Центр тяжести полусегмента OMP (чертеж 52) параболы имеет координаты $\xi=\frac{3}{5}x_1$ и $\eta=\frac{3}{8}y_1$.

Центр тяжести параболоида, происходящего от вращения полусегмента OMP, имеет координаты

$$\xi=\frac{2}{3}x_1 \quad \text{и} \quad \eta=0$$

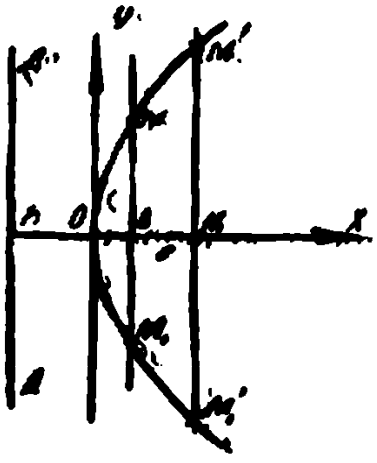
Момент инерции сегмента MOM_1 параболы относительно оси x-ов $J_x=\frac{4}{15}x_1y_1^3$, а относительно оси y-ов $J_y=\frac{4}{7}x_1^3y_1$.

Способы построения параболы.

1-й способ Пусть DD_1—директриса и F—фокус параболы (чертеж 57). Откладываем от начала произвольный отрезок ON и проводим через точку N прямую, параллельную оси „y"-ов.

Из фокуса радиусом $FM=KN$ засекаем на этой прямой две точки M и M_1. Очевидно, эти точки принадлежат параболе, ибо каждая из них одинаково удалена от фокуса и от директрисы.

Задавшись вторым произвольным отрезком ON_1 получим еще пару точек, и т. д.



Чертеж 57.

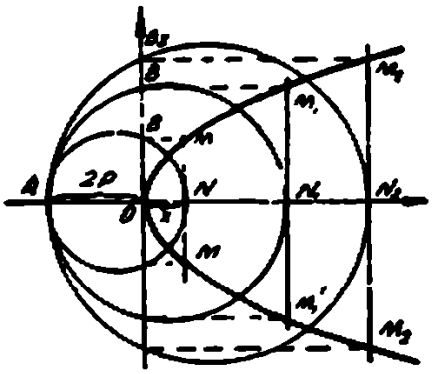
2-й способ. Из уравнения параболы $y^2=2px$ следует $\frac{2p}{y}=\frac{y}{x}$; таким образом ордината любой точки параболы является средней пропорциональной между 2p и абсциссой этой точки.

Исходя из этого, проводим следующее построение: откладываем $OA=2p$ и $ON=x$ (чертеж 58), строим на AN как на диаметре окружность. Тогда $\frac{AO}{OB}=\frac{OB}{ON}$ или

$\frac{2p}{OB} = \frac{OB}{x}$, следовательно $OB = y$. Итак OB — ордината, соответствующая абсциссе ON, остается перенести ее параллельно самой себе на перпендикуляр, восстановленный к оси х-ов точке N.

Задаваясь новой абсциссой ON_1, найдем подобным построением точку M_1 и т. д

3-й способ. Построение параболы по данной точке $M_1(x_1, y_1)$ на ней и касательной OX в вершине производится следующим образом: делим OP и PM на одинаковое число равных частей (чертеж 59), проводим лучи $O1$, $O2$, $O3$.. и т. д и параллели к оси $1M_1$, $2M_1$, $3M_1$. и т. д., тогда точки пересечения лучей и параллелей и будут точками параболы.



Чертеж 58

Действительно, уравнение параболы, проходящей через точку (x_1, y_1), у которой ось совпадает с осью у-ов, имеет вид

$$y = y_1 \frac{x^2}{x_1^2}$$

Нетрудно показать, что координаты любой из точек M_2, M_3 и т д удовлетворяют этому уравнению. Покажем это для точки $M_3(x_2\ y_2)$ Из подобия треугольников OM_3N и OCP имеем

$$\frac{M_3N}{CP} = \frac{ON}{OP},$$

или $\frac{y_2}{CP} = \frac{x_2}{x_1}$ но $x_2 = x_1 a$,

и $CP = y_1 a$;

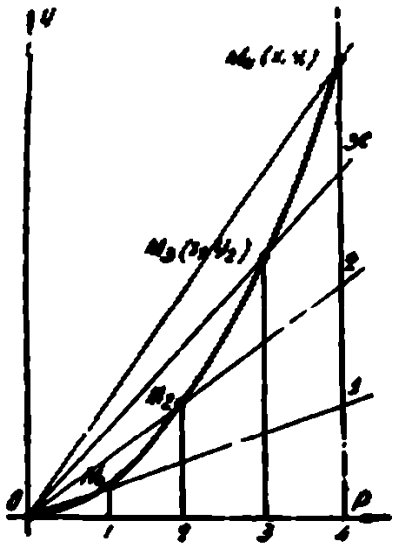
$$a = \frac{x_2}{x_1}$$

$$CP = y_1 \frac{x_2}{x_1}$$

(где a—некоторый коэфициент, в нашем случае $a = 3/4$) Подставляя в пропорцию, получим

$$y^2\ y_1 \frac{x_2}{x_1} = x_2\ x_1$$

откуда $y_2 = y_1 \frac{x_2^2}{x_1^2}$

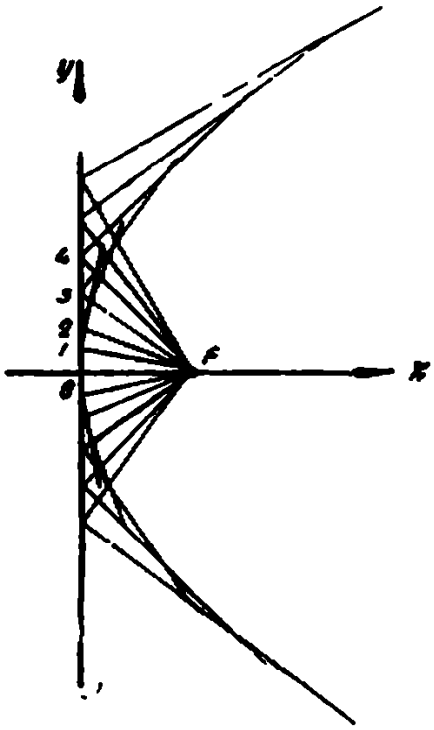


Чертеж 59.

Таким образом, действительно, точка M_3 лежит на параболе, ибо координаты ее удовлетворяют уравнению этой параболы, записанному нами в начале доказательства.

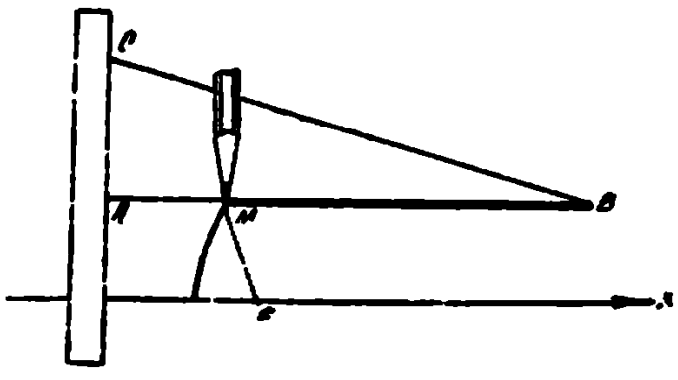
4-й способ. Парабола может быть построена как огибающая ее касательных следующим образом: пусть известно, что OX—ось параболы и точка F—фокус ее (чертеж 60), проводим ось y—касательную в вершине параболы, проводим далее из фокуса F ряд лучей F1, F2, F3 и т. д. и в точках 1, 2, 3 и т. д. восстанавливаем к этим лучам перпендикуляры, которые и будут касательными к нашей параболе.

В основе этого построения лежит отмеченное нами выше свойство параболы, согласно которому основания перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные, лежат на касательной в вершине данной параболы.



Чертеж 60

5-й способ Параболу можно вычертить непрерывным движением следующим образом проводим ось OX параболы и ее директрису (чертеж 61), прикладываем к директрисе линейку, а к линейке—угольник, к ребру AB которого прилегает нить, причем длина нити=AB, один конец ее укреплен в точке B угольника, а другой в фокусе F параболы Острием карандаша натягиваем нить и, не отрывая острия от ребра угольника будем двигать угольник так, чтобы ребро AC скользило по директрисе Тогда острие карандаша вычертит параболу.



Чертеж 61.

Действительно во все время движения:

$$MB + MF = AB,$$

откуда.

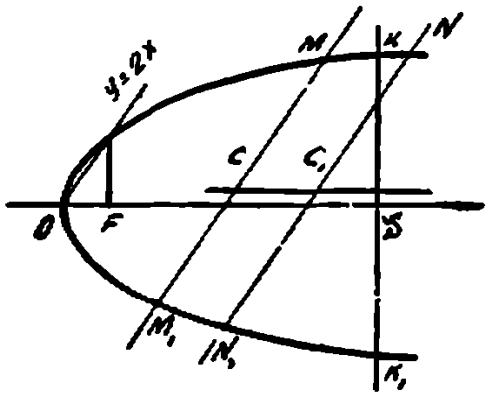
$$MF = AB - MB = AM,$$

и, следовательно, точка M остается всегда одинаково удаленной от фокуса и от директрисы.

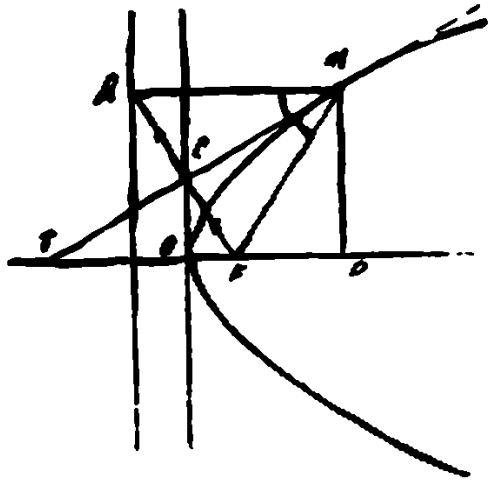
Построение оси и фокуса параболы.

Чтобы построить ось уже вычерченной параболы, поступают так проводят две параллельных хорды MM_1 и NN_1 (чертеж 62) и через середины их C и C_1—прямую, которая будет, очевидно, диаметром параболы; из любой точки K параболы проводим прямую $KK_1 \perp CC_1$ и через ее середину S — прямую $SO \perp KK_1$, которая и будет осью данной параболы.

Чтобы найти фокус этой параболы, строим прямую $y=2x$; абсцисса OF точки пересечения этой прямой



Чертеж 62



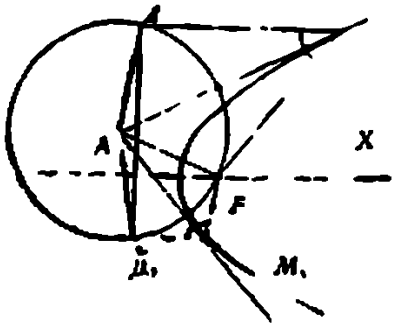
Чертеж 63

с параболой будет равна $\frac{p}{2}$, в чем можно убедиться, решая систему $\begin{cases} y=2x \\ y^2=2px \end{cases}$, но в таком случае точка F и будет искомым фокусом

Построение касательных к параболе.

Для построения касательной к параболе в точке M, лежащей на ней, можно предложить 2 способа·

1. Из точки M (чертеж 63) опускаем перпендикуляр на директрису, через середину C прямой DF и данную точку M проводим прямую CM, которая, являясь биссектрисой угла DMF, и будет, очевидно, искомой касательной.



Чертеж 64

2 Можно построить касательную также пользуясь свойством подкасательной ($S_T = 2x$). Откладываем OT=OP, тогда прямая TM и будет искомой касательной

Для построения касательной к параболе из точки A, лежащей вне ее, поступим так: из точки A радиусом AF проводим окружность (чертеж 64) и в точках D и D_1 восстанавливаем к директрисе перпендикуляры, которые пересекут параболу в точках M и M_1; тогда прямая AM будет биссектрисой угла DMF, что следует из равенства треугольников ADM и AFM, а прямая AM_1—биссектрисой угла D_1M_1F, что следует из равенства треугольников AD_1M и AFM_1 (по трем сторонам), но в таком случае AM и AM_1 и будут искомыми касательными.

Парабола как график квадратного трехчлена.

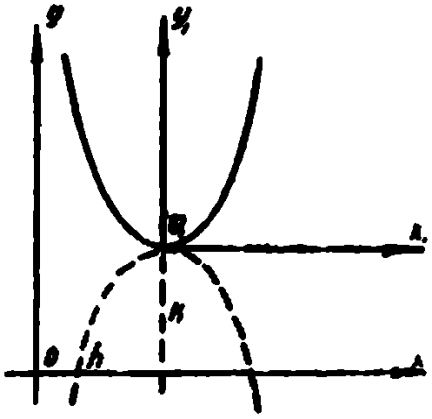
Предположим, что вершина параболы находится не в начале координат, а в точке $O_1(h, k)$, а ось параболы || оси y-ов (чертеж 65). Если в точке O_1 поместить новую систему осей $X_1O_1Y_1$, то в этой системе уравнение параболы примет вид

$$x_1^2 = 2py_1,$$

если же мы захотим записать уравнение этой параболы в старой системе, то воспользовавшись формулами перехода

$$x = x_1 - h \text{ и } y_1 = y - k,$$

получим



Чертеж 65.

$$(x - h)^2 = 2p(y - k) \quad (1)$$

Раскрываем скобки и уединяем y

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p} = 0.$$

Правая часть этого уравнения представляет собою квадратный трехчлен.

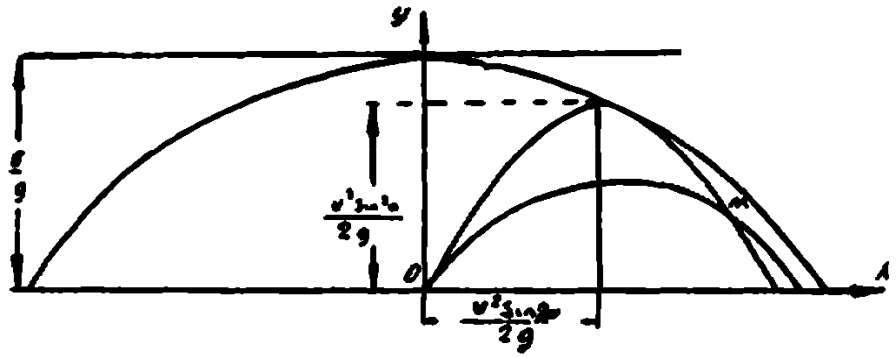
Таким образом парабола является графиком квадратного трехчлена.

Так как всякое уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$ можно привести к уравнению вида (1), то любой квадратный трехчлен относительно x-са выражает собой параболу с осью || оси y-ов.

Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$ (см. чертеж)

Применения параболы.

1. Парабола как траектория тела, брошенного под углом к горизонту.



Чертеж 66

Предположим, что некоторая материальная точка O брошена с начальной скоростью v под углом α к горизонту (чертеж 66)

Определим траекторию этой точки, пренебрегая сопротивлением воздуха

Расположим систему координатных осей в вертикальной плоскости, выбрав за начало координат начальное положение точки O.

Счет времени t поведем с начала движения Движение точки можно рассматривать состоящим из двух движений. равномерного—направленного по горизонтали—оси x-ов и равномерно-замедленного, благодаря действию силы тяжести, направленного по вертикали—оси y-ов

Соответственно этому начальная скорость v может быть разложена на 2 составляющие, одна из которых v_1 направлена по оси x-ов, а другая v_2—по оси y-ов

Очевидно $v_1 = v\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ и $v_2 = v\,\mathrm{Sin}\,\alpha$

Пусть через t сек. после начала движения точка O продвинулась в горизонтальном направлении на расстояние x, а в вертикальном—на расстояние y

Тогда $x = v\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ t$ и $y = v\,\mathrm{Sin}\,\alpha\ t - \frac{gt^2}{2}$.

Исключая из этих уравнений время t, получим уравнение траектории

$$y = \mathrm{tg}\,\alpha . x - \frac{g}{2v^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}\,x^2$$

или $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{g}{2v^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$ и $b = \mathrm{tg}\,\alpha$

Но мы уже знаем, что подобное уравнение выражает, параболу с осью || оси y-ов.

Итак: парабола является траекторией точки брошенной в пустоте под углом к горизонту.

Поставим себе задачу определить огибающую парабол, соответствующих различным значениям угла α.

Полученное выше уравнение траектории можно переписать в виде

$$f(x, y, \alpha) = gx^2 - v^2 x \operatorname{Sin} 2\alpha + v^2 y \operatorname{Cos} 2\alpha - v^2 y = 0$$

тогда

$$f_\alpha'(x, y, \alpha) = -2v^2 x \operatorname{Cos} 2\alpha - 2v^2 y \operatorname{Sin} 2\alpha = 0$$

Для получения уравнения огибающей необходимо, как известно, исключить параметр α из системы

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f_\alpha'(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Определяя из 2-го уравнения $\operatorname{Sin} 2\alpha$ и $\operatorname{Cos} 2\alpha$ и подставляя в 1-ое, после упрощений получим

$$gx^2 + 2gv^2 y - v^4 = 0$$

или

$$y = -\frac{g}{2v^2} x^2 + \frac{v^2}{2g}$$

или

$$y = ax^2 + b,$$

где

$$a = -\frac{g}{2v^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{v^2}{2g}$$

Преобразовав последнее уравнение к виду

$$x^2 = \frac{1}{a}(y - b)$$

замечаем, что искомая огибающая является параболой, у которой ось совпадает с осью y-ов.

В баллистике эту параболу называют предельной параболой, или параболой безопасности

Вращая эту параболу, мы получим параболоид ограничивающий поражаемую часть пространства. В точки, лежащие вне этого параболоида, снаряды, выпущенные из O с заданной скоростью v, попасть не могут.

Любая точка внутри этого параболоида может быть поражена двояким путем Действительно, желая определить—под каким углом нужно бросить снаряд, чтобы попасть в точку M, мы, подставив ее ординаты в уравнение

траектории для определения угла α, получим для α два значения (так как уравнение квадр.); это показывает, что через точку M проходят две параболы, более отлогую из них в баллистике называют *настильной*, а другую *навесной*

Покажем, что все параболы, получающиеся при различных значениях α, имеют *общую директрису* Для этой цели уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v^2 \operatorname{Cos}^2\alpha} x^2$$

приведем к виду $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, где h и k—координаты вершины параболы, как это уже было показано выше.

Имеем после преобразования

$$\left(x - \frac{v^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha}{g}\right)^2 = -\frac{2v^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}{g}\left(y - \frac{v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha}{2g}\right)$$

Тогда, очевидно, координаты вершины нашей параболы:

$$h = \frac{v^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g} \quad \text{и} \quad k = \frac{v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha}{2g}$$

и полупараметр ее:

$$\frac{p}{2} = \frac{v^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}{2g}.$$

В таком случае уравнение директрисы $y = k + \frac{p}{2}$ примет вид:

$$y = \frac{v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha}{2g} + \frac{v^2 \operatorname{Cos}^2\alpha}{2g}$$

или

$$y = \frac{v^2}{2g}.$$

В полученное уравнение α совершенно не входит, следовательно, директриса $y = \frac{v^2}{2g}$ действительно является *общей для всех парабол.*

Так как из уравнения огибающей следует, что вершина ее имеет ординату $\frac{v^2}{2g}$, то *общая директриса парабол является, очевидно, касательной в вершине огибающей.*

Интересно заметить еще, что геометрическое место фокусов парабол соответствующим различным значениям α

является окружностью, имеющей центр в начале координат и касающейся директрисы.

В самом деле, координаты фокуса $x = h$ и $y = k - \frac{p}{2}$

или $$x = \frac{v^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g} \quad \text{и} \quad y = -\frac{v^2}{2g} \operatorname{Cos} 2\alpha.$$

Исключая из этих уравнений параметр α, получаем уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = \frac{v^2}{4g^2}$$

Наконец, исключая параметр α из уравнений:

$$x = \frac{v^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g} \quad \text{и} \quad y = \frac{v^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{2g},$$

выражающих координаты вершины траектории, мы получим уравнение эллипса, малая ось которого совпадает с перпендикуляром, опущенным из начала координат на директрису Таким образом геометрическое место вершин всех парабол, получающихся при различных значениях α, служит эллипс

Определим траекторию струи жидкости, вытекающей горизонтально через отверстие сосуда, предполагая, что количество вытекающей жидкости непрерывно восполняется, так что уровень жидкости в сосуде остается на постоянной высоте h

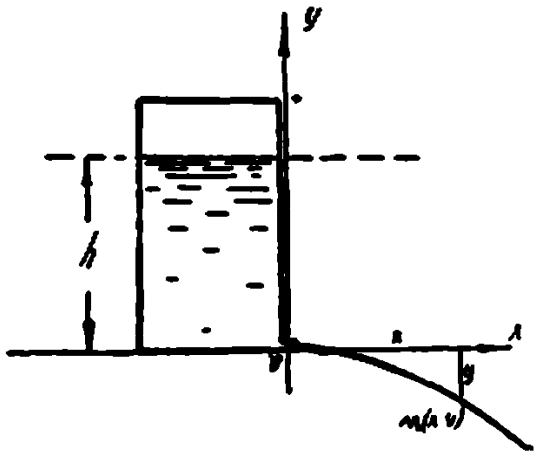
Сопротивлением воздуха и трением в наших рассуждениях будем пренебрегать. Расположение системы координат указано на чертеже (черт 67).

Каждая капля, вытекающая из отверстия, участвует в двух движениях—горизонтальном, с постоянной скоростью v и вертикальном, с начальной скоростью равной нулю и ускорением g

Через t сек. после выхода этой капли из отверстия она продвинется в горизонтальном направлении на расстояние x, в вертикальном—опустится на расстояние y.

Очевидно,

$$x = vt \quad \text{и} \quad y = -\frac{gt^2}{2};$$



Чертеж 67.

исключая из этих уравнений параметр, получим уравнение траектории

$$x^2 = -\frac{2v^2}{g}y,$$

являющееся уравнением параболы с осью по оси y-ов.

Так как при постоянном уровне скорость истечения жидкости из отверстия выражается равенством

$$v = \sqrt{2gh},$$

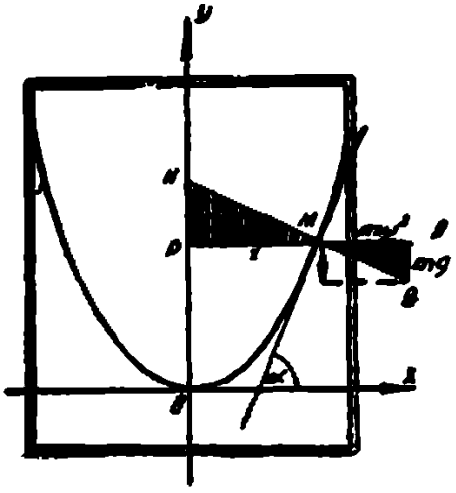
то уравнение траектории может быть переписано в виде

$$x^2 = -4hy,$$

откуда следует, что полупараметр параболы $\frac{p}{2} = h$, но в таком случае директриса полученной параболы лежит в плоскости уровня жидкости в сосуде.

2. Параболоид вращающейся жидкости

Пусть некоторый цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, приведен во вращательное движение вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω (чертеж 68).



Чертеж 68

Благодаря действию центробежной силы поверхность жидкости будет вдавливаться внутрь цилиндра и через некоторое время после начала вращения примет установившуюся характерную форму. Исследуем эту форму. Осевое сечение цилиндра примем за координатную плоскость, а ось цилиндра за ось y-ов, осью же x-ов будем считать прямую, проходящую через самую низкую точку исследуемой поверхности.

Определим вид кривой, получившейся в осевом сечении. Очевидно, любая точка M этой кривой подвергается действию двух сил, одна из которых—сила тяжести равна mg, а другая—центробежная сила равна $mx\omega^2$ (где m—масса точки M, а x—расстояние ее от оси вращения).

Равнодействующая этих сил при установившемся равновесии вращающейся жидкости будет направлена по нормали к кривой

Представив эти силы на чертеже соответствующими отрезками, замечаем, что $\triangle AMB \sim \triangle NMP$, откуда:

$$\frac{NP}{AB}=\frac{PM}{MA}$$

или

$$\frac{S_N}{mg}=\frac{x}{mx\omega^2}$$

и, следовательно,

$$S_N=\frac{g}{\omega^2}=\text{const.}$$

Таким образом поднормаль искомой кривой оказалась величиной постоянной, но мы знаем уже, что этим свойством обладает парабола Чтобы окончательно убедиться в этом, найдем уравнение этой параболы

Имеем

$$S_N=\frac{g}{\omega^2},\quad \text{но}\quad S_N=x\frac{dx}{dy},$$

следовательно,

$$x\frac{dx}{dy}=\frac{g}{\omega^2}.$$

откуда $xdx=\frac{g}{\omega^2}dy$ и после интегрирования: $x^2=\frac{2g}{\omega^2}y$.

Постоянное интегрирования с в нашем случае равно 0, ибо при нашем выборе осей координат при $x=0$ и $y=0$, а следовательно и $c=0$.

Таким образом искомая кривая действительно является параболой и, следовательно, вогнутая поверхность вращающейся жидкости имеет форму параболоида

Из полученного уравнения непосредственно видно, что положение вершины параболоида на оси y зависит исключительно от величин угловой скорости ω

Этим обстоятельством воспользовался Браун, сконструировав прибор, позволяющий измерять скорость вращения вала. Прибор этот состоит из замкнутого цилиндра, содержащего жидкость, на поверхности цилиндра нанесена шкала с делениями, указывающими скорость вращения. Прибор укрепляется на валу таким образом, чтобы ось его совпадала с осью вала, тогда, во время вращения, против вершины образовавшегося параболоида можно всегда прочитать на шкале соответствующую скорость

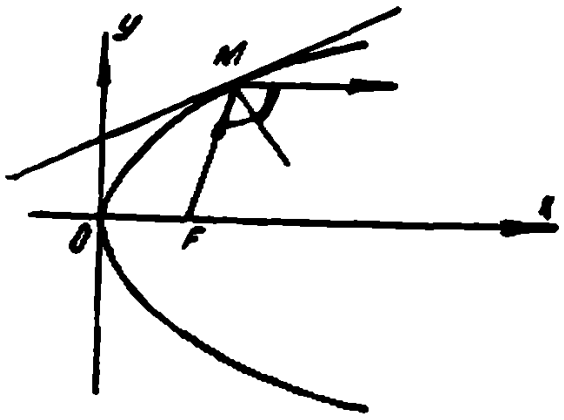
3. Параболическое зеркало

Мы уже знаем, что нормаль к параболе, проведенная в любой ее точке M, делит пополам угол между фок.

рад-вектором этой точки и прямой, проходящей через эту точку параллельно оси x-ов (чертеж 69)

Но в таком случае, согласно закона отражения (угол отражения равен углу падения), луч, выходящий из фокуса, отразившись в точке M, направится параллельно оси параболы

Наоборот—лучи, падающие параллельно оси парвболы, после отражения соберутся в фокусе, отсюда происхождение слова фокус, что значит очаг



Чертеж 69.

Таким образом, если поверхности зеркала придать форму параболоида вращения, в фокусе которого поместить источник света, то лучу, отразившись от поверхности зеркала, направятся в пространство параллельным пучком

Подобным образом устраиваются прожекторы

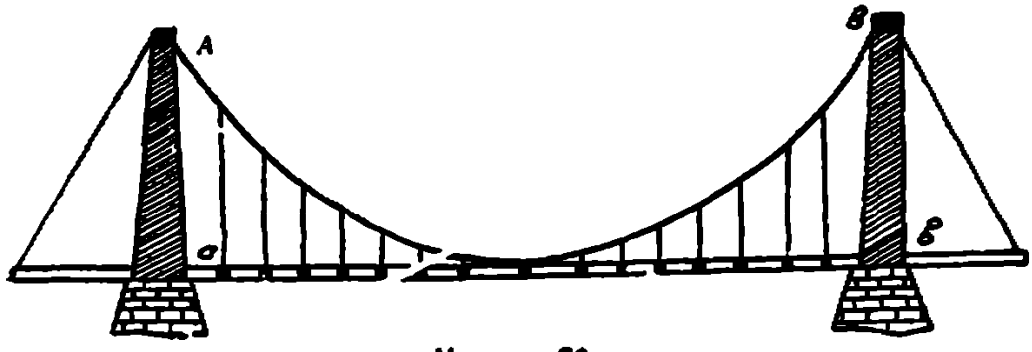
Тщательно изготовленными парвболическими зеркалами пользуются также при устройстве отражательных телескопов-рефлекторов

Применение параболы в технике.

1. Цепь висячего моста

В области техники парабола имеет много важных применений Рассмотрим некоторые из них

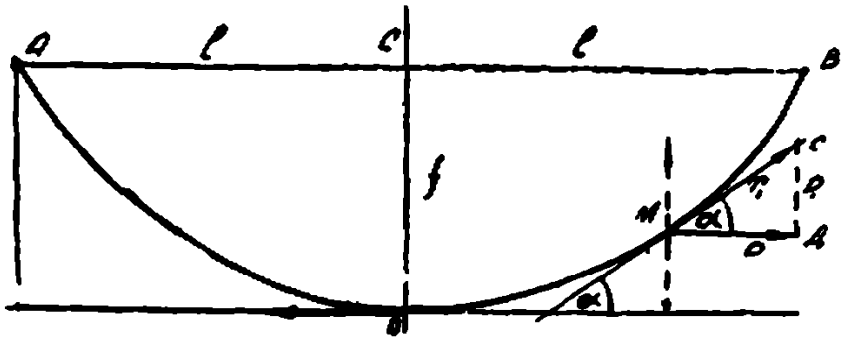
Предположим, что гибкая нерастяжимая нить укреплена своими концами в точках A и B Нить эта отягощена грузом, равномерно распределенным по ее горизонтальной проекции ab (чертеж 70)



Чертеж 70

Примером подобной нити служит цепь висячего мостя, поддерживающя нстил моста с помощью рядя вертикальных стержней. Если при этом вес самой цепи неэначителен, то цепь принимает форму парболы.

Рассмотрим дугу OM двиной нити (чертеж 71) Эта дуга подвергается действию трех сил одив нэ них T—силв горизонтвльного нвтяжения, приложенная в точке O и нвправленнвя влево по оси x-ов, вторая T_1—силв нвтяжения в точке M, напрвлевнвя по касательной впрво вверх и, наконец, третья сила Q—сила тяжести, направленная вертикально вниз и пропорционвльнвя длине горизонтвльной проекции X дуги OM, в силу рввномерного распределения нвгруэки по длине горизонтвльной проекции нашей нити. Если при этом нвгруэку, приходящуюся на единицу длины



Чертеж 71.

bb, обозначить через q, то очевидно $Q = qx$.

Рвзложим силу T_1 на две P и P_1, одна из которых горизонтвльнв, в другвя—вертиквльна.

Так квк вся нить нвходится в равновесии, то горизонтальные и вертиквльные силы, действующие на дугу OM должны быть рввны, следовательно $T = P$ и $Q = P_1$.

Из треугольникв MCD имеем.

$$P_1 = P \operatorname{tg} \alpha$$

или:

$$Q = T \operatorname{tg} \alpha.$$

Но $Q = qx$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, следовательно, $qx = T \frac{dy}{dx}$

откуда, интегрируя, получвем уравнение парболы:

$$x^2 = \frac{2T}{g} y.$$

Постоянное интегрирования $C = 0$, так как при наше, выборе системы координат при $x = 0$, $y = 0$ и $C = 0$.

Расстояние AB между точквми привеса нити обоэначвется через 2l, а расстояние CO—череэ f Первое иэ них ивэывается пролетом, в второе—стрелой провеса.

Так как числа l и f должны удовлетворять уравнению параболы, то

$$l^2 = \frac{2T}{q} f,$$

откуда получаем формулу

$$T = \frac{ql^2}{2f} \qquad (1)$$

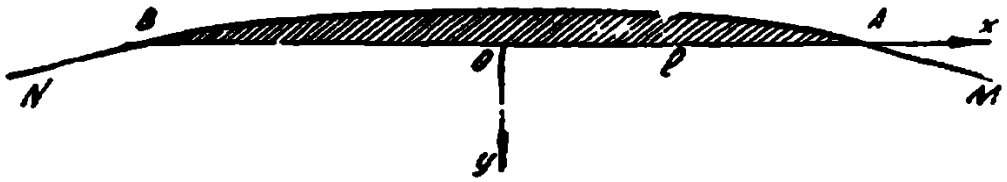
поэволяющую определять гориэонтальное натяжение нити в точке O.

Очевидно, нагруэка, испытываемая всей нитью, равна 2lq Обоэнвчив ее череэ p и вводя в формулу (1), получим важное, при расчете мостов, соотношение.

$$T = \frac{pl}{4f}.$$

2 Парабола, как профиль моста.

Профилю моста придают обыкновенно форму параболы которая в точках A и B (чертеж 72) сопрягается с прямыми AM и BN. Очевидно, для плавного перехода эти прямые должны быть квсательными к параболе в точках A и B.



Чертеж 72.

Если эадано расстояние AB = 2l и наклон k прямых AM и BN, то нетрудно получить уравнение параболы.

Мы уже энаем, что для параболы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}$, но для нашего случая при $x = l$ $\operatorname{tg}\alpha = m$

Таким обраэом $m = \frac{l}{p}$, откуда $p = \frac{l}{m}$, и уравнение пвраболы принимает вид

$$x^2 = \frac{2l}{m} y.$$

3. Параболические формы

Примером применения первболы в технике, кроме рассмотренных случаев, могут служить параболические фермы, употребляемые в некоторых мостовых конструкциях

Вылетам подъемных кранов также придают иногда форму параболы.

4. Парабола моментов.

Вообразим балку, расположенную на двух опорах, испытывающую равномерно распределенную по ее длине нагрузку. Сопротивление изгибу в каком-либо сечении этой балки пропорционально моменту инерции этого сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести этого сечения и перпендикулярной к изгибающей силе.

Момент инерции в этом случае называют изгибающим моментом.

Таким образом, изгибающий момент характеризует прочность балки в данном сечении и изменяется при переходе от одного сечения к другому.

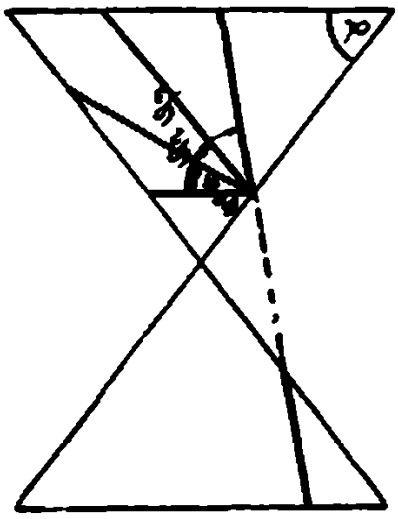
График этого изменения является парабола, называемая параболой моментов.

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ 2-го ПОРЯДКА.

Кривые 2-го порядка как сечения конуса.

Твк как эллипс, гипербола и пврабола выражаются уравнениями 2-й ст относительно переменных, то их наэывают кривыми 2-го порядка

Все кривые 2-го порядка могут быть получены в реэультате сечения плоскостью прямого круглого конуса



Чертеж 73

Обоэначим угол, составленный секущей плоскостью с плоскостью основания конуса череэ φ, а угол при основании в осевом сечении конусв череэ α (чертеж 73)

Тогда:

при $\varphi_0=0$ получим окружность,
при $\varphi_1<\alpha$—эллипс,
при $\varphi_2=\alpha$—параболу,
при $\varphi_3>\alpha$—гиперболу

Соответственно такому обраэованию кривых 2-го порядка можно вывести их уравнения

Древние греки иэучали эллипс, гиперболу и параболу именно как конические сечевия, и чисто геометрическим методом, путем длительных и сложных рассуждений вскрыли почти все наиболее важные свойства этих кривых

Общее определение кривых 2-го порядка

Перейдем к дальнейшим обобщениям относительно кривых 2-го порядка

Мы видели, что для эллипса, гиперболы и пвраболы отношение рвсстояния любой точки кривой от фокусв к рвсстоянию той же точки от соответствующей директрисы есть величинв постоянивя

В силу этого можно дать следующее общее определение кривых 2-го порядка как геометрическпх мест

Кривой 2-го порядка наэывается геометрическое место точек, построенных таким обрвэом, что отношение расстояния каждой нэ этих точек от некоторой двиной точки—фокусв к расстоянию той же точки от данной прямой—директрисы, является для данной кривой величиной постоянной

Эту постоянную величину обоэнвчают череэ e

Если $e<1$, то кривая является эллипсом,
при $e=1$ получаем параболу,
при $e>1$ получаем гиперболу.

Окружность твкже подчиняется этому общему определению кривых 2-го порядка, являясь частным случвем эллипса, когда $a=b$ и, следоввтельно, для окружности

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2-a^2}}{a}=0$$

Так как при $a=b$ $c=\sqrt{a^2-b^2}=0$, то фокусы окружности совпадвют в ее центре.

Уравнение директрисы для окружности принимает вид $x=\pm\frac{a^2}{0}$ или $x=\pm\infty$ Таким обраэом обе директрисы окружности лежат в бесконечности

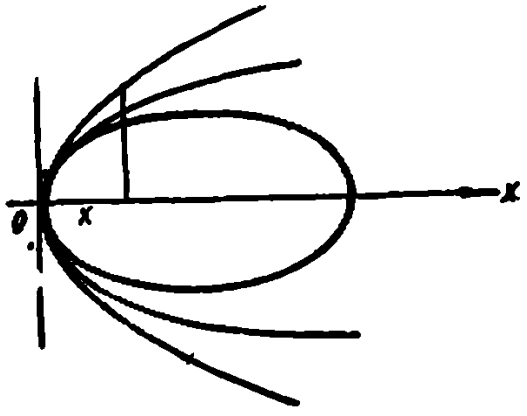
Общее уравнение кривых 2-го порядкв, отнесенных к вершине.

Соответственно общему определению кривых 2-го порядка можно получить их общее уравнение

Пусть OX—общая ось эллипса, парвболы и гиперболы, а нвчало координат их—общвя вершина (чертеж 74) Чтобы перейти от рассмотренных нвми выше уравнений эллипса и гиперболы, отнесенных к центру, так наэываемых каноничесних уравнений, к уравнениям этих кривых, отнесенным к вершине, воспольэуемся формулами перехода Нвэывв старую систему череэ $X_1 O_1 Y_1$, получаем

$$x_1=x-a \quad \text{и} \quad y_1=y$$

Подставляя в квионические урввнения, получвем:



Чертеж 74

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ — уравнение эллипса

и $$\frac{(x-a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ — уравнение гиперболы

После преобразований, заменяя $\frac{b^2}{a}$ через p полупараметр эллипса и гиперболы (см выше), получим уравнение эллипса, отнесенное к вершине

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2,$$

уравнение гиперболы

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2$$

и прежде полученное уравнение параболы

$$y^2=2px,$$

Из этих уравнений следует, что для эллипса

$$y^2<2px$$

для гиперболы

$$y^2>2px$$

и для параболы

$$y^2=2px$$

Таким образом, при данном значении полупараметра p и заданной абсциссе x наименьшая ордината будет у эллипса, а наибольшая—у гиперболы.

Это дает нам возможность судить о взаимном расположении кривых (см. чертеж 74)

Рассматривая y^2 как площадь квадрата, построенного на ординате, а 2px как площадь прямоугольника с основанием x и высотой 2p, заключаем, что для эллипса площадь квадратв меньше площади прямоугольника, для гиперболы—больше, а для парабоды эти площади равны.

Отсюда происходят названия, данные греками кривым 2-го порядка: эллипс от слова ἔλλειψις – недостаток,

гипербола „ „ ὑπερβολή—избыток,

парабола „ „ παραβολή—равенство

Полученные три отдельные уравнения кривых 2-го порядка можно обобщить в одно.

Замечая, что для эллипса

$$\frac{p}{a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-e^2,$$

а для гиперболы.

$$\frac{p}{a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=-(1-e^2),$$

и для пвраболы

$$\frac{p}{a}=0,$$

мы сможем написать общее для всех кривых 2-го порядка уравнение

$$y^2=2px-(1-e^2)x^2.$$

При $e=0$ это урввнение выражвет окружность, при воэрвстании е окружность обрвтится в эллипс, который будет деформироваться, все больше и больше рвстягиввясь Когда е обрвтится в единицу, эллипс обрвтится в параболу, а при дальнейшем воэрастании е мы будем наблюдвть уже гиперболу.

При $e=\infty$ уравнение $y^2=2px-(1-e^2)x^2$ обратится в уравнение $x^2=0$, следоввтельно гипербола выродится в пвру прямых, совпадвющих с осью у-ов

Итвк, при воэрастании е от нуля до бесконечности перед нами пройдут все формы кривых 2-го порядка, причем за время этого процесса иэменения мы только нв одни момент будем наблюдвть пврвболу, все остальное время до этого момента будет посвящено деформации эллипса, а после этого момента—деформации гиперболы. В силу этого обстоятельства на пвраболу нужно смотреть квк на переходную форму от эллипсв к гиперболе

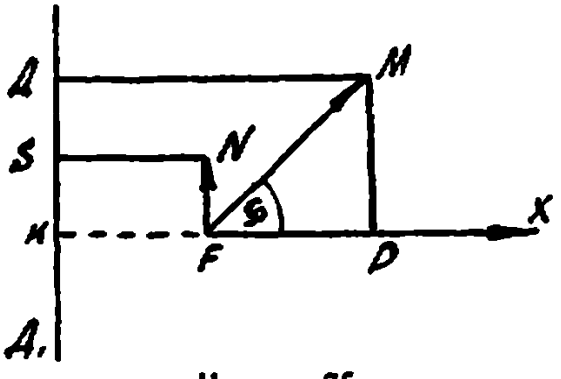
Общее уравнение кривых 2-го порядка в полярной системе.

Получим еще одно общее уравнение кривых 2-го порядка, но уже в полярной системе координат

Пусть F—фокус, в DD_1—директриса некоторой кривой 2-го порядка (черт. 75).

Принимаем фокус эа полюс, а прямую Fx—эа полярную ось. Пусть M—некоторая точка данной кривой.

Тогдв, согласно общего определения кривых 2-го порядка



Чертеж 75

$$\frac{MF}{MD} = e$$

или

$$\frac{r}{MD} = e \qquad (1)$$

Если FN—фокальная ордината, равная, как известно, p, то

$$\frac{P}{NS} = e,$$

откуда

$$NS = \frac{p}{e},$$

но тогда

$$MD = PF + NS = r\,Cos\,\varphi + \frac{p}{e}.$$

Подставляя в равенство (1), имеем

$$\frac{r}{r\,Cos\,\varphi + \frac{p}{e}} = e,$$

откуда получаем общее уравнение кривых 2-го порядка в полярной системе

$$r = \frac{p}{1 - e\,Cos\,\varphi},$$

Уравнением этим особенно часто пользуются в астрономии. Полярный угол φ в астрономии называется истинной аномалией

Общее уравнение кривых 2-го порядка в декартовой системе.

Самым общим уравнением кривых 2-го порядка является уравнение вида.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} и т д —некотдрые постоянные коэфициенты.

Раэделив все члены этого уравнения на a_{33}, мы эаметим, что в урввнении останется 5 коэфициентов; отсюдв следует, что кривая 2-го порядка, вообще говоря, эадается 5 точками или 5-ю условиями, поэволяющими получить 5 уравнений относительно коэфициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} и т. д.

В курсвх вивлитической геометрии доказыввется, что **вид кривой**, вырвжвемый общим урввнением, определяется величиной двух детерминвитов, один иэ которых

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & в_{23} \\ a_{31} & в_{32} & в_{33} \end{vmatrix}$$

наэывается „дискриминантом кривой", а второй

$$\delta = \begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} \\ a_{21} & в_{22} \end{vmatrix}$$

нвэыввется „дискриминантом стврших членов"

Если $\Delta \neq 0$, то при $\delta > 0$ у-ние выражвет **эллипс**,
„ $\delta = 0$ „ „ **пвраболу**,
„ $\delta < 0$ „ „ **гиперболу**.

Если $\Delta = 0$, то при $\delta > 0$ уравнение вырвжает мнимые прямые, пересеквющиеся в действительной точке;
при $\delta = 0$ урввнение вырвжает две || прямые;
при $\delta < 0$ уравнение выражает две действительные пересекающиеся прямые.

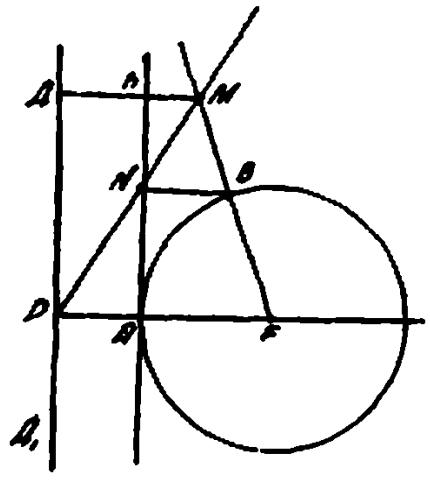
Общий способ построения кривых 2-го порядка.

Соответственно общему определению кривых 2-го порядка можно указать **общий способ построения** их по заданным фокусу, директрисе и эксцентриситету.

Пусть F—фокус, а DD_1 — директриса. Перпендикуляр, опущенный иэ фокуса на директрису, будет осью кривой (черт. 76).

Раэделив отреэок FP на две части AF и AP так, чтобы $\frac{AF}{AP} = e$, получим в точке A вершину кривой

Для построения квкой-либо точки кривой поступвем следующим обрвэом. в точке A проводим $AK \perp PF$, а иэ точки F рвдиусом FA—окружность; проводим проиэвольный рвдиус FB этой окружности, иэ B опусквем перпендикуляр на AK, проводим эатем прямую



Чертеж 76

PN до встречи ее с продолженным радиусом FB в точке M; полученная точка M будет принадлежать кривой

Для доказательства опустим на директрису перпендикуляр MD, тогда из подобия треугольников имеем:

$$\frac{MF}{BF}=\frac{MP}{NP}=\frac{MD}{DK}$$

или

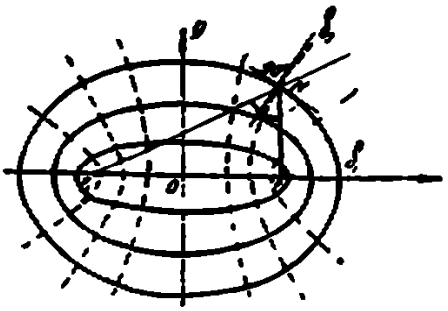
$$\frac{MF}{MD}=\frac{BF}{DK},$$

но $BF=AF$ и $DK=AP$. Тогда, подставив, получаем

$$\frac{MF}{MD}=\frac{AF}{AP}=e,$$ что и требовалось доказать

Софокусные кривые.

Кривые 2-го порядка, имеющие общие фокусы, называются, софокусными, или конфокальными.



Чертеж 77

Основное свойство софокусных кривых заключается в том, что они пересекают друг друга под прямым углом (чертеж 77)

Действительно, выше мы видели, что касательная к эллипсу делит пополам угол между фок. радиусами-векторами, но биссектрисы смежных углов перпендикулярны друг другу, а так как угол между кривыми измеряется углом между их касательными в точке пересечения, то наши кривые, действительно, перпендикулярны между собой.

Пусть нам задано фокусное расстояние 2c и ось 2a эллипса, тогда уравнение его можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Если полагать, что a может принимать различные значения, то при постоянном c полученное уравнение выражает семейство софокусных эллипсов

Совершенно подобно этому уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$ выражает семейство софокусных гипербол.

Так как уравнение сопряженных эллипсов и софокусных гипербол совершенно одинаковы, то можно сказать, что вообще уравнение

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1 \qquad (1)$$

при переменном λ выражает **семейство софокусных эллипсов и гипербол.**

Из уравнения (1) следует, что при заданных $x=x_1$ и $y=y_1$ мы получаем квадратное уравнение относительно λ, решив которое, найдем 2 значения для λ, соответствующие двум кривым семейства, проходящим через точку $M(x_1, y_1)$.

Рассматривая точку M как результат пересечения двух софокусных кривых, называют λ_1 и λ_2—значения λ, соответствующие данным кривым, **эллиптическими координатами точки** M.

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ.

Гиперболические кривые.

Исследование формы.

Гиперболическими иазываются кривые. общее уравиеиие которых имеет вид

$$y = \frac{c}{x^m}, \qquad (1)$$

где с—иекоторая постояиная (Во всех дальиейших рассуждениях будем считать число с положительным), а m—любое положигельиое число

Остаиовимся иа рассмотреиии характериых особеииостей формы этих кривых

Из уравиеиия (1) отчетливо видио, что при возрастаиии $|x|$ от 0 до ∞, $|y|$ измеияется от ∞ до 0. Это обстоятельство говорит за то что оси координиат являются ассимптотами гиперболических кривых.

При измеиеиии х-са от $-\infty$ до $+\infty$ фуикция $y = \frac{c}{x^m}$ претерпевает разрыв иепрерывиости при $x=0$, когда у обращается в ∞, из этого следует, что каждая гиперболическая кривая будет состоять из двух отдельиых ветвей (черт 78) При этом

1. Если m—число целое и четиое, то кривая будет симметричиа оси у-ов и ветви ее расположатся в 1-м и 2-м координиатиых углах

2. Если m число целое, ио иечетиое, то ветви кривой расположатся в 1-м и 3-м координиатиых углах

3 При m—дробиом кривые будут симметричны оси х-ов и расположатся в 1-ом и 4-ом координиатиых углах, если зиамеиатель у m будет чпслом четиым, в противиом случае ветви кривой расположатся в 1-м и 3-ем координиатиых углах, если числитель у показателя m будет числом иечетиым и в 1-м и 2-ом, если ои будет четиым

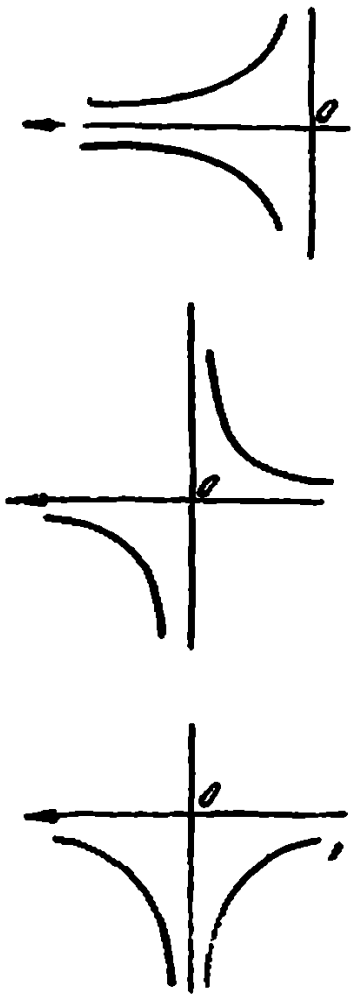
Замечаем далее, что при $x = \pm 1$ $|y| = c$ при любом зиачеиии m Это показывает, что все кривые соответ-

ствующие уравнению $y = \frac{c}{x^m}$, где с постоянно, а m—прини-мает различные значения, пройдут через 2 общих точки, которые будут расположены в тех или иных координатных углах в зависимости от расположения ветвей самих кривых (черт. 78)

Изменяя m от 0 до ∞ можно проследить всю эволюцию форм гиперболических кривых

Для значений m близких к нулю соответствующие кривые будут тесно прилегать к ломаной NKY (черт. 79), которую можно таким образом рассматривать как первую предельную форму гиперболических кривых. При $m = 1$ получается равносторонняя гипербола $y = \frac{c}{x}$, свойство которой мы уже рассматривали выше

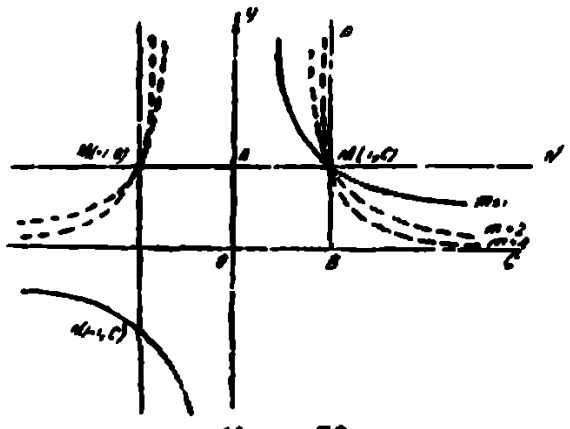
При дальнейшем возрастании m можно заметить, как ветви кривой будут все больше и больше стремиться стать параллельными координат. осям и при $m = \infty$ ветвь кривой, находящаяся в 1-м координатном углу сольется с ломаной ABC, которая будет являться, таким образом, второй предельной формой гиперболических кривых.



Черт 78

Построение гиперболических кривых.

Рассмотрим построение гиперболических кривых для случая, когда m является числом **целым**



Черт 79

Способы построения для любого значения m будут даны при рассмотрении политропных кривых

Итак, пусть $M(x_0, y_0)$— некоторая точка лежащая на кривой

$$y = \frac{c}{x^m} \text{ или } y = cx^{-m},$$

(черт 80) тогда очевидно $y_0 = cx_0^{-m}$, откуда $c = \frac{y_0}{x_0^{-m}}$ и уравнение кривой принимает вид

$$y = \frac{y_0}{x_0^{-m}} x^{-m} \qquad (1)$$

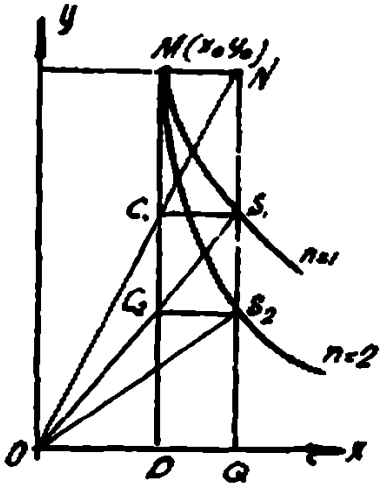
Выбрав систему координат и построив точку M проводим луч ON и из точки N пересечения его с продолжением перпендикуляра, опущенного из точки M на ось y-ов, опускаем перпендикуляр NQ на ось x-ов Проводим затем $C_1S_1 \perp NQ$, тогда точка S_1 будет принадлежать гиперболической кривой 1-го порядка, проходящей через точку M

Для доказательства обозначим OQ через x_1, а S_1Q через y_1, тогда из подобия треугольников ONQ и OS_1Q имеем

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x_0}{x_1},$$

откуда

$$y_1 = \frac{y_0}{x_0^{-1}} x_1^{-1}$$



Черт 80

Полученное равенство показывает, что координаты точки S_1 удовлетворяют уравнению (1), а следовательно, точка S_1 действительно лежит на гиперболической кривой 1-го порядка

Если продолжить построение и, соединив точку S_1 с началом координат, опустить из точки C_2 на прямую NQ перпендикуляр C_2S_2, то полученная точка S_2 будет принадлежать гиперболической кривой 2-го порядка, проходящей через точку M.

Действительно, обозначив OQ через x_2, а S_2Q через y_2, из подобия треугольников OS_1Q и OS_2Q получим $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_0}{x_2}$, откуда $y_2 = \frac{y_1x_0}{x_2}$, но $y_1 = \frac{y_0}{x_0^{-1}} x_1^{-1}$, а $x_1 = x_2$, тогда, после подстановки получим

$$y_2 = \frac{y_0}{x_0^{-2}} x_2^{-2}$$

Последнее равенство показывает, что координаты точки S_2 действительно удовлетворяют уравнению гиперболич. кривой 2-го порядка, проходящей через точку M_1

Продолжив аналогичным способом построение мы получим точку S_3, принадлежащую гиперболич. кривой 3-го порядка, проходящей через точку M

Таким образом, рассмотренный способ дает возможность строить сколько угодно точек гиперболической кривой любого порядка.

Гиперболические кривые в технике.

Примером применения гиперболических кривых в технике может служить гиперболическая кривая 2-го порядка, являющаяся графиком распределения напряжений, возникающих в стержне, имеющем форму усеченного конуса, который растягивается постоянной силой, действующей вдоль оси этого стержня

3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ.

Параболические кривые.

Исследование формы.

Параболическими иазываются кривые, общее уравиеиие которых имеет вид

$$y=cx^m,$$

где c—иекоторая постояииая (Во всех дальиейших рассуждеииях будем полагать $c>0$), а m—любое положительиое число

Выясиим особеииости форм параболических кривых.

Так как фуикция $y=cx^m$ при измеиеиии x-са от $-\infty$ до $+\infty$ ие имеет разрывов; при $x=0$ обращается в иоль, а при возрастаии $|x|$ до бесконечиости также возрастает до бескоиечиости, то каждая параболическая кривая будет состоять из одиой ветви, проходящей через иачало координат и уходящей своими коицами в бескоиечиость (черт. 81).

При $x=\pm 1$ $|y|=c$ совершеиио иезависимо от величии m, это показывает, что параболические кривые соответствующие определеииому зиачеиию c и различиым зиачеииям m пройдут через две общих точки.

Таковы осиовиые соображеиия о форме параболических кривых, все частиые особеииости будут определяться величиной показателя m.

1. Если m будет числом целым и четиым, то кривые будут симметричиы оси y-ов и займут 1-й и 2-й коорд. углы (черт. 81 верхиий).

2 Если m будет числом целым, ио иечетиым, то кривые расположатся в 1-м и 3-м координиатиых углах (черт. 81 средиий).

3. При m дробиом кривые будут симметричны оси x-ов и займут 1-й и 2-й координиатиые углы, если зиамеиатель дроби m будет числом четиым (черт. 81, иижиий) в противном случае кривые расположатся в 1-м и 2-м координиатиых углах, если числитель дроби m будет числом четиым и в 1-м и 3-м углах если этот числитель будет иечетиым.

К этому нужно добавить, что в 1-ом координатном углу при $m>1$ кривые будут обращены к положительному направлению оси y-ов вогнутостью, а при $m<1$—выпуклостью (черт 82).

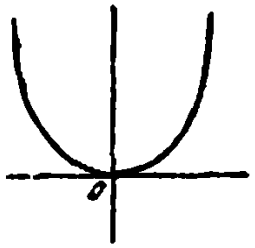
Действительно из выражения для 2-ой производной

$$y'' = m(m-1)cx^{m-2}$$

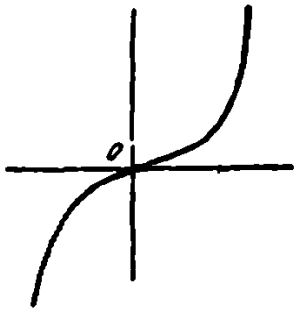
следует, что при положительных значениях x-са y'' будет положительным числом при $m>1$ и отрицательным при $m<1$.

Для кривых, располагающихся в 1-ом и 3-м координатных углах, начало координат служит точкой перегиба, так как знак второй производной $y''=m(m-1)cx^{m-2}$ при соответствующих значениях m при переходе x-са через ноль меняется.

Для кривых, располагающихся в 1-ом и 4-ом координатных углах и обращенных выпуклостью к оси x-ов, начало координат является точкой возврата 1-го рода, так как верхняя и нижняя части кривой имеют в начале координат общую касательную, совпадающую с осью x-ов

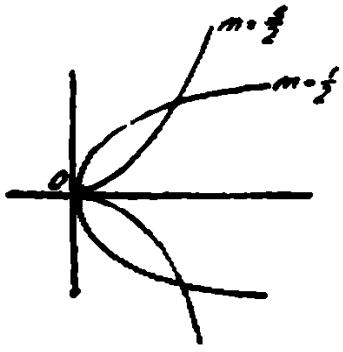


Тоже следует сказать о кривых, располагающихся в 1-ом и 2-ом координатных углах и обращенных выпуклостью к оси y-ов.



Чтобы проследить всю эволюцию форм параболических кривых будем давать различные значения m, причем ограничимся рассмотрением изменения тех частей кривых, которые лежат в 1-ом координатном углу.

При $m=1$ получим прямую $y=cx$, если теперь m неограниченно приближать к нулю, то ветви кривой, обращенные вогнутостью к оси y-ов, будут все теснее и теснее примыкать к ломаной CAO (черт. 82), если же заставить m изменяться от 1 до ∞, то ветви кривых, обращенные выпуклостью к оси y-ов, будут стремиться совпасть с ломаной DBO.



Черт 81.

Эти ломаные и являются предельными формами параболических кривых.

Свойства параболических кривых.

Заметим некоторые свойства параболических кривых

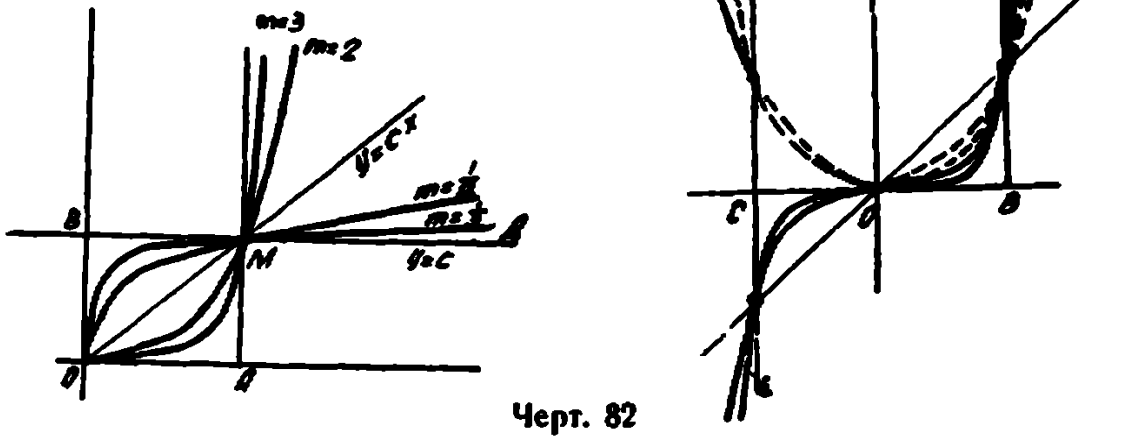
1. Для любой параболической кривой $y=cx^m$ подкасательная $S_T=\frac{x}{m}$.

Действительно $$S_T=\frac{y}{y'}=\frac{cx^m}{cmx^{m-1}}=\frac{x}{m}.$$

2. Если $M(x_0, y_0)$ некоторая точка параболической кривой (черт. 83), то дуга OM делит площадь прямоугольника $MAOB$ на две части, отношение которых равно m.

Действительно

$$U_1=c\int_0^{x_0}x^m\,dx=c\frac{x_0^{m+1}}{m+1}$$

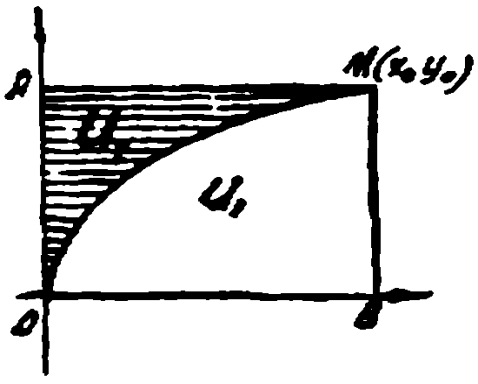


Черт. 82

$$U_2=\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}}\int_0^{y_0}y^{\frac{1}{m}}\,dy=\frac{y_0^{\frac{1}{m}+1}}{c^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{m}+1\right)}=\frac{cmx_0^{m+1}}{m+1}$$

Откуда $$U_2\ U_1=m$$

Точно таким же образом можно показать, что:



Черт. 83

3. Отношение объемов тел вращения вокруг осей x-ов площадей U_2 и U_1 (черт. 83) равняется $2m$.

Из всех параболических кривых наиболее часто встречаются, кроме параболы 2-го порядка, кубическая парабола $y=cx^3$ и полукубическая $y=cx^{\frac{3}{2}}$, называемая также параболой Нейля.

Кубическая парабола.

Кубической параболой иазывается кривая, отиосящаяся к классу параболических кривых и имеющая уравиеиие.

$$y = cx^3$$

Кривая заиимает 1-й и 3-й координиатиые углы при $c>0$ и 2-й и 4-й при $c<0$

Оиа обращеиа выпуклостью к оси у-ов в 3-м координатиом углу и вогиутостью в 1-м.

В начале координиат кубическая парабола имеет точку перегиба.

Общее уравнение кубической параболы и ее форма.

Парабола соответствующая уравиеиию $y = cx^3$ является частным случаем более общего класса кубических парабол, соответствующих уравиеиию:

$$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Чтобы определить форму кривой, соответствующей этому уравиеиию, мы предварительиио переиесем иачало координиат в точку (α, β).

Тогда иаше уравиеиие примет вид

$$y + \beta = a_0(x+\alpha)^3 + a_1(x+\alpha)^2 + a_2(x+\alpha) + a_3 \quad *)$$

или

$$y = a_0x^3 + (3a_0\alpha + a_1)x^2 + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + \\ + (a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta)$$

Распоряжаясь величииой α и β выберем их так, чтобы члеи x^2 и свободиый члеи обратились в иули. Для этого иеобходимо, чтобы:

$$3a_0\alpha + a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta = 0$$

откуда $\alpha = -\dfrac{a_1}{3a_0}$ и $\beta = a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3$.

В результате таких преобразоваиий уравиеиие иашей кривой примет простой вид:

$$y = a_0x^3 + cx,$$

*) Значки „прим" у иопых перемеиных всюду опущены.

где $c = 3a_0\alpha^2 + 2a\alpha + a_2$.

Предположим, что в нашем случае $a_0 > 0$.

Тогда кривая соответствующая получениому уравнению будет проходить через начало координат и пересекать ось x-ов в точках, где $x = \pm\sqrt[3]{-\frac{c}{a_0}}$, очевидно при $c > 0$ эти точки окажутся мнимыми.

Так как $y' = 3a_0x^2 + c$, то корни 1-ой производной будут:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{3a_0}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{3a_0}}$$

Отсюда видно, что при $c < 0$ кривая будет иметь две вершины, в 4-м и 2-ом координатных углах (чертеж 84).

При переходе x-са через 0 вторая производная меняет знак, таким образом начало координат будет точкой перегиба.

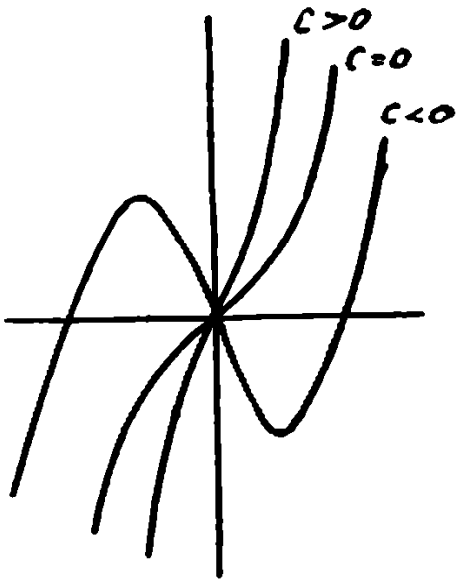
Если $a_0 < 0$ то вершины кривой расположатся в 1-ом и 3-м координатных углах.

Таким образом среди параболических кривых, соответствующих уравнению

$$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

следует различить два типа.

Кривые 1-го типа, соответствующие положительным значениям c, пересекают ось x-ов только в начале координат и не имеют вершины.



Черт 84.

Кривые 2-го типа, соответствующие отрицательным значениям c, пересекают ось x-ов в 3-х точках и имеют две вершины.

Применение кубической параболы к решению кубического уравнения.

Абсциссы точек пересечения с осью x-ов параболы 3-го порядка являются корнями кубического уравнения:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

На этом положении основан графический способ решения кубических уравнений.

Если левая часть кубического уравнения будет соответствовать параболе 1-го типа, то данное уравнение будет иметь только один действительный корень, если же—параболе 2-го типа, то все три корня уравнения будут действительными

В технике кубической параболой пользуются как переходной кривой при постройке железнодорожных линий.

Полукубическая парабола.

Полукубической параболой называется кривая, относящаяся к классу параболических кривых и имеющая уравнение $y^2 = cx^3$

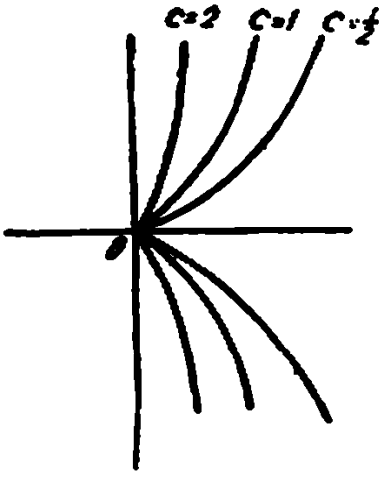
Представив уравнение полукубической параболы в виде:

$$y = \pm cx\sqrt{x}$$

(плюс относится к верхней части кривой, а минус—к нижней), видим, что она является симметричной оси x-ов и располагается в 1-м и 4-ом координатных углах (при любом c) (черт. 85).

Так как вторая производная $y'' = \pm \frac{3c}{4\sqrt{x}}$ оказывается положительной для верхней части кривой и отрицательной для нижней, то кривая будет обращена к положит. направлению оси y-ов, вогнутостью в 1-м углу и выпуклостью в 4-ом.

Переписав уравнение в виде $y^2 - cx^3 = 0$, исследуем кривую на касательные в начале.



Черт. 85

Для получения уравнений касательных к кривой в начале необходимо, как известно, приравнять к нулю группу членов низшей степени.

В нашем случае получим $y^2 = 0$.

Из этого видно, что в начале координат две касательных слились в одну—ось x-ов и так как наша кривая симметрична оси, то заключаем, что начало координат является для полукубической параболы точкой возврата 1-го рода.

В заключение еще одно замечание о форме кривой: если постоянный коэфициент $c \to 0$, то парабола стремится слиться с осью x-ов, если же $c \to \infty$, то парабола неограниченно приближается к оси y-ов.

Таким образом положительная часть оси x-ов и вся ось y-ов является предельными формами полукубической параболы

Полукубическая парабола, как эволюта квадратичной параболы.

Полукубическая парабола является эволютой обыкновенной параболы $y^2 = 2px$. Покажем это.

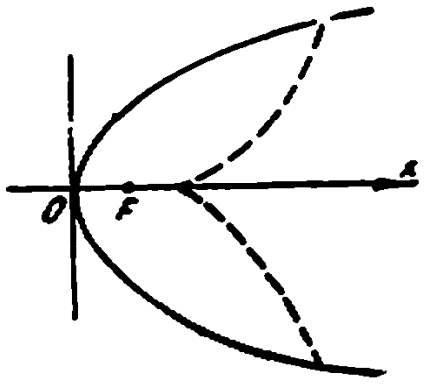
Параметрически уравнения эволюты имеют, как известно, вид

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}; \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

В нашем случае $y' = \frac{p}{y}$ и $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$

Подставляя, после преобразований, получим уравнения искомой эволюты в виде

$$\begin{cases} \xi = 3x + p \\ \eta = -\frac{y^3}{p^2} \end{cases}$$



Черт 86

Из этих уравнений следует.

$$x = \frac{\xi - p}{3} \quad \text{и} \quad y = -(p^2 \eta)^{\frac{1}{3}}$$

Подставляя эти значения в уравнение параболы, получаем окончательно уравнение эволюты в виде

$$(p^2 \eta)^{\frac{2}{3}} = 2p \frac{\xi - p}{3}$$

откуда.

$$\eta = \sqrt{\frac{8}{27p}} (\xi - p)^{\frac{3}{2}}$$

Уравнение это, как видно, выражает полукубическую параболу, смещенную параллельно оси y-ов, с вершиной в точке (p, O) (черт. 86).

Нейлоид.

Тело, полученное от вращения полукубической параболы вокруг оси x-ов, называется нейлоидом (черт. 87). С нейлоидом можно встретиться в лесном деле.

Оказывается, что прикорневые части древесного ствола имеют форму усеченных нейлоидов.

Вычислим объем нейлоида.

Имеем

$$V = \pi \int_0^{x_1} c \cdot x^3 \, dx = \frac{c \cdot \pi x_1^4}{4} = \frac{\pi y_1^2 x_1}{4}$$

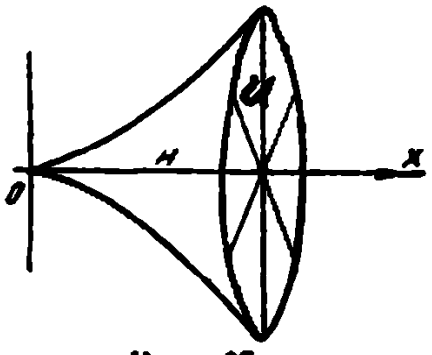
Но πy_1^2 есть площадь сечения, соответствующая абсциссе x_1. Обозначим эту площадь через U, а абсциссу x_1 через H, тогда

$$V = \frac{1}{4} UH,$$

т. е. объем нейлоида равен одной четверти произведения площади его основания на высоту.

Механическое свойство полукубической параболы.

В заключение заметим одно из механических свойств полукубической параболы. Оказывается, если материальную точку, подверженную только действию силы тяжести, заставить падать по кривой, имеющей форму полукубической параболы, то скорость падения (скорость удаления этой точки от ее первоначального горизонта), этой точки будет постоянна.



Черт 87.

Построение параболических кривых.

Остановимся на способах построения параболических кривых 3-го, 4-го и 5-го порядков.

Общие способы построения, применимые при любом m, будут даны при рассмотрении политропных кривых.

1. Построение кубической параболы.

Пусть точка $M(x_0\, y_0)$ (черт. 88) лежит на параболе

$$y = cx^3$$

тогда $y_0 = cx_0^3$,
следовательно,

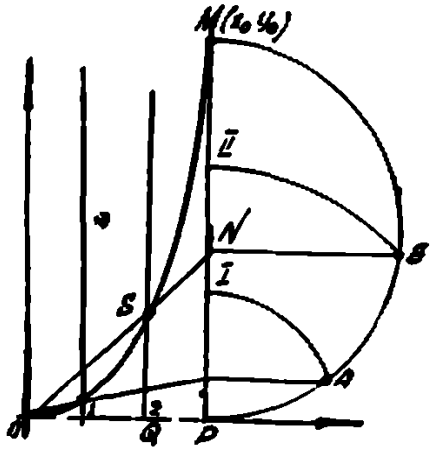
$$c = \frac{y_0}{x_0^3}$$

и уравнение данной параболы примет вид

$$y = \frac{y_0}{x_0^3} x^3$$

Для построения n точек данной параболы разделим $OP = x_0$ и $MP = y_0$ на $n+1$ равных частей.

Построим на MP как на диаметре полуокружность Радиусами PI, PII и т. д. проведем концентрические дуги IA, IIB и т. д. и из точек A, B и т. д. опустим перпендикуляры на MP, а основания этих перпендикуляров соединим с началом координат. Восстановим далее к оси x-ов в точках 1, 2 и т. д перпендикуляры. Точки пересечения этих перпендикуляров с лучами, проведенными раньше, будут точками кубической параболы.



Черт 88

Покажем это для точки $S(x_1, y_1)$. Из подобия тр-ов OSQ и ONP имеем

$$\frac{SQ}{OQ} = \frac{NP}{OP}$$

или

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{NP}{x_0},$$

но

$$x_1 = x_0\alpha \quad \text{и} \quad NP = \frac{PB^2}{MP} = \frac{(y_0\alpha)^2}{y_0} = \alpha^2 y_0$$

(где α—некоторый множитель, определенный при заданных x_0 и x_1) и так как

$$\alpha = \frac{x_1}{x_0}, \text{ то } NP = \frac{x_1^2 y_0}{x_0^2}$$

Подставляя эти выражения в пропорцию получим:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x_1^2 y_0}{x_0^3} \quad \text{или} \quad y_1 = \frac{y_0}{x_0^3} x_1^3,$$

откуда видно, что координаты точки S удовлетворяют уравнению данной параболы, следовательно, точка S действительно принадлежит этой параболе.

2. Построение параболы 4-го порядка.

Параболу 4-го порядка можно построить зная одну из ее точек M и ряд точек, принадлежащих параболе 3-го порядка, проходящей через ту же точку M

Итак, пусть парабола 4-го порядка, которую мы хотим построить, проходит через точку $M(x_0\, y_0)$ (черт. 89), тогда уравнение этой параболы можно записать в виде:

$$y = \frac{y_0}{x_0^4} x^4$$

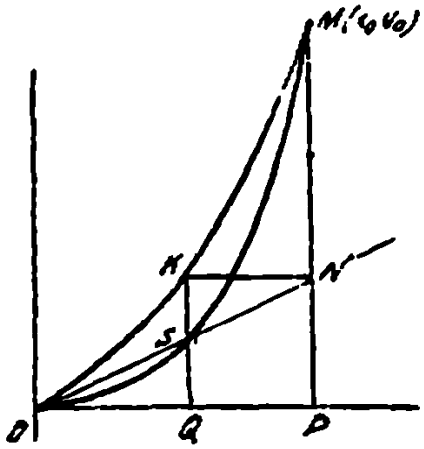
Пусть $K(x_3, y_3)$ одна из данных точек параболы 3-го порядка

$$y = \frac{y_0}{x_0^3} x^3,$$

тогда очевидно

$$y_3 = \frac{y_0}{x_0^3} x_3^3$$

Чтобы построить соответствующую точку параболы 4-го порядка, поступим следующим образом проводим $KN \perp MP$ и $KQ \perp OQ$, соединяем точку N с началом тогда точка $S(x_4, y_4)$ пересечения луча ON и перпендикуляра KQ будет принадлежать параболе 4-го порядка.



Черт. 89.

Действительно, из подобия треугольников OSQ и ONP следует.

$$\frac{y_4}{NP} = \frac{x_4}{x_0}, \quad \text{но} \quad NP = y_3 = \frac{y_0}{x_0^3} x_3^3,$$

а так как $x_3 = x_4$,

то

$$NP = \frac{y_0}{x_0^3} x_4^3$$

Подставляя в пропорцию получим

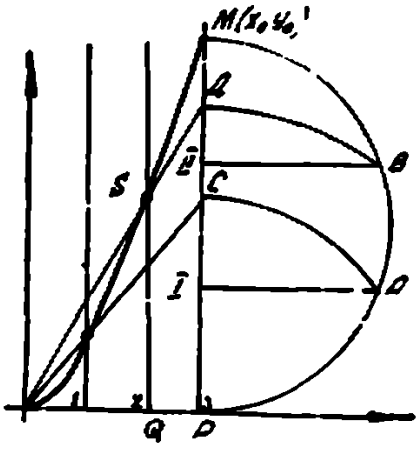
$$y_4 = \frac{y_0}{x_0^4} x_4^4$$

Из последнего равенства видно, что точка $S(x_4, y_4)$ действительно принадлежит параболе 4-го порядка.

Построение точек параболической кривой 5-го порядка по точкам параболы 4-го порядка производится точно таким же приемом каким мы только что построили параболу 4-го порядка по точкам кубической параболы.

3. Построение полукубической параболы.

Если $M(x_0, y_0)$ точка, принадлежащая полукубической параболе, то для построения ряда других точек, принадлежащих этой параболе, поступаем так делим OP и MP (черт. 90) на одинаковое число равных частей, на MP как на диаметре строим полуокружность, через точки I, II и т д проводим перпендикуляры к прямой MP, а из точек A, B и т д их пересечения с окружностью проводим концентрические дуги AC, BD и т. д, соединяем точки C и D с началом координат, а к оси x-ов в точках 1, 2 и т д. восстанавливаем перпендикуляры Точки пересечения этих перпендикуляров с лучами будут принадлежать данной полукубической параболе.



Черт 90

Доказательство этого положения проводится точно так же, как это делалось в предыдущих случаях

4. Построение парабол $y = cx^n$, где n — целое число.

В заключение заметим, что построение параболических кривых, уравнение которых имеет вид $y = cx^n$, где n — целое число сводится к построению парабол n-го порядка.

Действительно, данное уравнение можно записать в виде $x = \frac{1}{c^n} y^n$, но построение кривых, соответствующих этому уравнению, мы уже рассматривали выше

4. ПОЛИТРОПНЫЕ КРИВЫЕ.

Политропные кривые.

Уравнение и форма политроп.

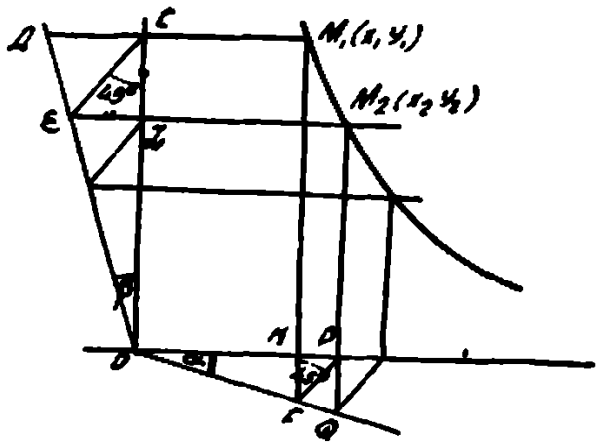
Гиперболические и параболические кривые можно объединить в общий класс кривых, уравнение которых имеет вид

$$yx^m = c,$$

где c—некоторая постоянная, а m—любое число.

Кривые эти называют политропными кривыми или политропами.

Если показатель m является числом положительным, то политропы носят гиперболический характер, при отрицательном m они являются параболами m-го порядка



Черт 91

В силу этого нам нет надобности заниматься изучением форм политропных кривых, ибо характерные особенности гиперболических и параболических кривых мы уже выяснили выше

Из уравнения политроп следует, что каждая из них определяется двумя параметрами m и c, таким образом, чтобы написать уравнение политропы необходимо знать две точки, через которые она проходит.

Построение политроп гиперболического типа ($m > 0$).

Пусть точка $M(x_1, y_1)$ лежит на политропе $yx^m = c$, тогда $y_1x_1^m = c$ и уравнение данной политропы примет вид $yx^m = y_1x_1^m$.

Отложим от оси x-ов по часовой стрелке произвольный острый угол α, а от оси y-ов против часовой стрелки угол β (черт 91), причем β выберем так, чтобы

$$(1+\operatorname{tg}\beta)=(1+\operatorname{tg}\alpha)^m$$

После этого через данную точку политропы проводим: $MF\perp$ оси x-ов и $M_1D\perp$ оси y-ов, через точки F и C проводим прямые FP и CE под углами в 45° к координатным осям, проводим, наконец, прямые EM_2 и PM_2. Точка M_2 пересечения этих прямых будет принадлежать политропе.

Действительно, из $\triangle ELO$ имеем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{EL}{OL}=\frac{CL}{OL}=\frac{y_1-y_2}{y_2},$$

подобно этому из $\triangle OKF$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{KF}{OK}=\frac{KP}{OK}=\frac{x_2-x_1}{x_1},$$

но отсюда следует:

$$1+\operatorname{tg}\beta=\frac{y_1}{y_2}$$

и

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{x_2}{x_1},$$

но так как: $1+\operatorname{tg}\beta=(1+\operatorname{tg}\alpha)^m$,

то:

$$\frac{y_1}{y_2}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m,$$

откуда:

$$y_2 x_2^m=y_1 x_1^m$$

Последнее равенство показывает, что точка $M_2(x_2, y_2)$ действительно принадлежит нашей политропе.

Повторив подобное построение относительно точки M_2, мы получим еще одну точку M_3 политропы и т. д.

Построение политроп параболического типа ($m<0$).

Пусть $m=-n$ построение в этом случае будет отличаться от предыдущего тем, что произвольный угол α откладывается не по часовой стрелке, а против, угол же β выбирается так, чтобы

$$1+\operatorname{tg}\beta=(1+\operatorname{tg}\alpha)^n$$

Все дальнейшее построение производится подобно предыдущему (черт 92).

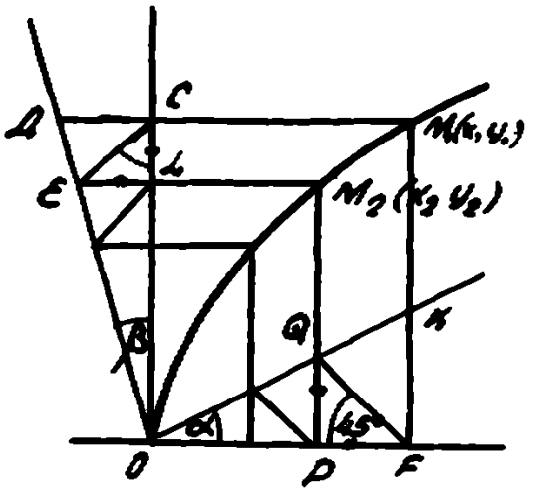
Общий способ построения политропы (при любом m)

Заметим предварительно, что если x_1 и y_1, x_2, y_2 удовлетворяют уравнению $yx^m = c$, то средние геометрические этих чисел

$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2} \quad \text{и} \quad y_3 = \sqrt{y_1 y_2}$$

также удовлетворят этому уравнению. Действительно, так как $y_1 x_1^m = c$ и $y_2 x_2^m = c$, то после умножения $(y_1 y_2)(x_1 x_2)^m = c$.

Основываясь на этом положении, можно строить политропу, если известны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ этой кривой, следующим путем строим полуокружности на OP и на OD (черт 93) проводим $M_2N \perp OD$ и $M_1C \perp OP$ проводим концентрические дуги NS и CQ, проводим $SM_3 \parallel$ оси x-ов и $QM_3 \parallel$ оси y-ов, точка M_3 пересечения этих прямых будет принадлежать нашей политропе, ибо абсцисса ее $x_3 = OQ = OC = \sqrt{OP \cdot OE} = \sqrt{x_1 x_2}$, а ордината $y_3 = OS = ON = \sqrt{OD \cdot OF} = \sqrt{y_1 y_2}$, но эти координаты, как мы уже заметили, удовлетворяют уравнению данной политропы.



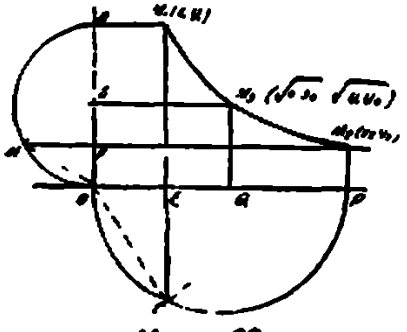
Черт 92.

Ясно, что подобным образом можно построить сколько угодно точек данной политропы, лежащих между данными точками M_1 и M_2

Применения политропных кривых

1. Политропные кривые в термодинамике.

Политропные кривые имеют большое применение в термодинамике. Примером этого могут служить так называемые адиабатические и изотермические кривые, являющиеся частными случаями политроп.


Черт. 93

Если изменение объема и давления газа происходит без потери и приобретения тепла, то изменение это называют адиабатическим

Политропные кривые

В термодинамике выводится соотношение между объемом v и давлением p газа, испытывающего адиабатическое изменение, полученное впервые Пуассоном

Согласно этого соотношения $pv^{\alpha} = c$, где α и c некоторые постоянные, причем α равняется дроби, числитель которой c_p является теплоемкостью данного газа при пост. давлении, а знаменатель c_v—теплоемкостью газа при пост объеме Очевидно $c_v < c_p$, ибо при пост. объеме количество теплоты, получаемое газом целиком, идет на повышение температуры, а при пост. давлении часть этого тепла тратится на преодоление давления при расширении газа В силу этого $\alpha > 1$.

Если до начала процесса изменения состояния газа объем его $v = v_0$, а давление $p = p_0$, то $p_0 v_0^{\alpha} = c$, откуда видно, что постоянная c определяется величинами начального объема и начального давления

Кривые, соответствующие уравнению $pv^{\alpha} = c$, называются **адиабатическими**.

Из самого уравнения и тех замечаний относительно величины α, которые мы сделали выше, следует, что **адиабатические кривые являются политропами гиперболического типа**

Если же изменение объема v некоторой массы газа и его давление p происходит так, что температура газа остается постоянной, то изменение это называют **изотермическим**

При изотермическом изменении соотношение между объемом газа и давлением его выражается законом Мариотта $pv = c$.

Кривые, соответствующие этому уравнению, являются также частным случаем политроп ($m = 1$) и имеют форму равносторонней гиперболы

2. Политропы как интерполяционные кривые

Из уравнения политропной кривой $yx^m = c$ следует

$$\lg y + m \lg x - \lg c = 0,$$

полагая

$$\lg x = \xi, \quad \lg y = \eta \quad \text{и} \quad -\lg c = c_1,$$

получим

$$\eta + m\xi + c_1 = 0;$$

последнее уравнение в системе $\xi 0 \eta$ выражает прямую

Таким образом, если в системе координат $\xi 0 \eta$ нанести точки, координаты ξ и η которых являются логарифмами

координат x и y точек, принадлежащих политропе, то точки эти будут лежать на прямой, угловой коэф которой равен показателю при x в уравнении политропы

Этим свойством политроп пользуются, употребляя их, как интерполяционные кривые.

Так, например, если некоторая эмпирическая кривая задается координатами ряда точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и т. д принадлежащих ей, и если неизвестно, что кривая эта относится к классу политроп, то для нахождения уравнения ее строят в системе $\xi 0 \eta$ точки N_1, N_2 и т д, координаты которых являются логарифмами координат точек M_1, M_2 и т д

Если рассматриваемая эмпирическая кривая действительно принадлежит к классу политроп, то в системе $\xi 0 \eta$ точки N_1, N_2 и т. д будут лежать на одной прямой, угловой коэф которой и определит величину показателя m в уравнении искомой политропы

Если же в системе $\xi 0 \eta$ получится не прямая, а ломаная, то по способам, излагаемым в курсах приближенных вычислений, заменяют эту ломаную некоторой вспомогательной прямой, от которой полученная ломаная отклоняется незначительно и получают, таким образом, для данной эмпирической кривой весьма близкую аналитическую форму в виде уравнения некоторой политропы

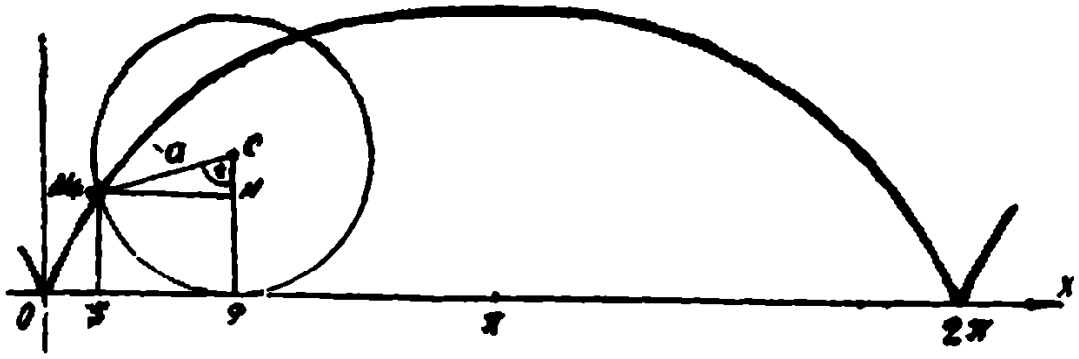
5. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ.

Циклоида.

Вывод уравнения

Кривую, называемую **циклоидой**, можно рассматривать как траекторию точки, лежащей на окружности круга, который катится по некоторой прямой. Исходя из этого определения, получим параметрические уравнения циклоиды

Пусть в начальный момент точка, описывающая циклоиду, находилась в начале координат, а через некоторый промежуток времени заняла положение M (x, y) (черт 94).



Черт 94

Обозначим угол MCP, на который повернулся круг через t и примем этот угол за параметр.

Тогда $x = OP - SP = OP - MN,$

но

$$\overline{OP} = \breve{MP} = at$$

и

$$MN = a \operatorname{Sin} t$$

и, следовательно:

$$x = at - a \operatorname{Sin} t$$

подобно этому

$$y = MS = CP - CN,$$

но

$$CP = a \quad \text{и} \quad CN = a \operatorname{Cos} t$$

и, следовательно $y = a - a \operatorname{Cos} t$

Таким образом получены следующие параметрические уравнения циклоиды:

$$x = a(t - \operatorname{Sin} t)$$

$$y = a(1 - \operatorname{Cos} t)$$

Исключая параметр t мы придем к уравнению циклоиды в декартовых координатах.

$$x = a \operatorname{arc\,Cos} \frac{a - y}{a} \pm \sqrt{2ay - y^2}$$

при этом знак + соответствует поднимающейся части арки циклоиды, а — опускающейся части ее.

Из этого уравнения видно, что циклоида относится к классу трансцендентных кривых

Форма циклоиды.

Исследуем несколько подробнее форму циклоиды. Легко видеть, что после полного оборота производящего круга вычерчивающая точка снова окажется на оси x-ов, как и в начале движения и т. о одна ветвь кривой будет описана. При дальнейшем движении производящего круга будет вычерчиваться вторая ветвь, затем третья и т д. Таким образом, циклоида, вообще говоря, будет состоять из ряда ветвей, число которых равно числу полных оборотов производящего круга. Из геометрических соображений легко также усмотреть, что наиболее высокие точки циклоиды—вершины будут соответствовать значением параметра, равным π, 3π, 5π.... $(2k+1)\pi$, значение ординаты для каждой из этих точек равно 2a—диаметру производящего круга

При значении параметра равных 0, 2π, 4π, . . $2k\pi$ соответствующие ординаты равны 0. В этих точках кончается одна ветвь циклоиды и начинается другая. Покажем, что эти точки являются точками возврата 1-го рода.

Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a \operatorname{Sin} t}{a - a \operatorname{Cos} t}$ то, очевидно, условием существования особой точки будет

$$a \operatorname{Sin} t = 0$$

$$a - a \operatorname{Cos} t = 0$$

Но эти уравнения удовлетворяются, как раз, значениями t равными 0, 2π, 4π..... $2k\pi$. Таким образом точки, соот-

ветствующие этим значениям параметра, действительно являются особыми точками.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim \frac{a \operatorname{Sin} t}{a - a \operatorname{Cos} t} = \lim \frac{\operatorname{Cos} t}{\operatorname{Sin} t} \underset{t \to 2k\pi}{=} \infty ,$$

таким образом угловой коэфициент касательной в особых точках циклоиды равен ∞, а это показывает, что касательная перпендикуляра к оси x-ов и является, очевидно, единственной касательной, которая существует в особой точке, а в таком случае эта особая точка и будет точкой возврата первого рода.

Исследуем кривизну циклоиды. Обозначив радиус кривизны через R, имеем

$$R = \frac{(1 + y_x'^2)^{3/2}}{y_x''} = \frac{\left[1 + \dfrac{\operatorname{Sin}^2 t}{(1 - \operatorname{Cos} t)^2}\right]^{3/2}}{-\dfrac{1}{a(1 - \operatorname{Cos} t)^2}} =$$

$$= -2a \sqrt{2 - 2 \operatorname{Cos} t} = -4a \operatorname{Sin} \frac{t}{2} .$$

Отсюда видно, что наибольшие значения радиус кривизны будет иметь при тех значениях параметра, при которых $\operatorname{Sin} \frac{t}{2} = 1$, таким образом эти значения будут $\pi, 3\pi, 5\pi$ . . . . $(2k+1)\pi$ и, очевидно, при этих значениях соответственно кривизна будет наименьшей (эти значения соответствуют вершинам циклоиды), наоборот, в точках, соответствующих значениям параметра $0, 2\pi, 4\pi$ . . . . $2k\pi$ радиус кривизны будет наименьшим и, следовательно, кривизна—наибольшей

Геометрические свойства циклоиды.

Рассмотрим теперь некоторые свойства циклоиды Назовем угол, составленный касательной к циклоиде с полож. напр. оси x-ов через α, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{Sin} t}{a - a \operatorname{Cos} t} = \frac{2 \operatorname{Sin} \dfrac{t}{2} \operatorname{Cos} \dfrac{t}{2}}{2 \operatorname{Sin}^2 \dfrac{t}{2}} =$$

$$= \operatorname{Ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

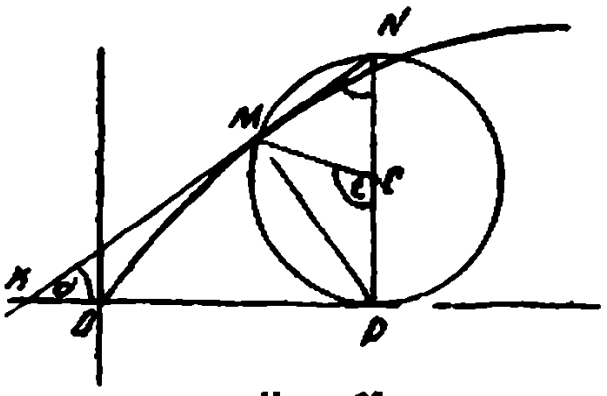
Таким образом

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2},$$

но на чертеже 95-ом видно, что прямая KN, проходящая через вычерчивающую точку M и наивысшую точку N производящего круга, составляет с осью x-ов угол

$$\angle NKP = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2},$$

а в таком случае эта прямая и будет, очевидно, касательной к нашей циклоиде в точке M.



Черт 95

Так как $MP \perp NK$, то, очевидно, MP является нормалью к циклоиде в точке M.

Таким, образом мы установили следующие свойства касательной и нормали к циклоиде. Касательная к циклоиде проходит всегда через высшую точку производящего круга, а нормаль — через его низшую точку.

Эти свойства позволяют легко и быстро строить касательную и нормаль в любой точке данной циклоиды. Очевидно, для этого достаточно провести через эту точку окружность производящего круга и провести прямые: одну — проходящую через данную точку и наивысшую точку окружности, а другую — через данную и наинизшую точки окружности произв. круга. Первая прямая будет касательной, а вторая — нормалью

Отметим еще некоторые интересные свойства циклоиды.

Определим длину нормали циклоиды:

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = a(1-\operatorname{Cos} t)\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{Sin} t}{1-\operatorname{Cos} t}\right)^2} = 2a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}$$

Но если вспомним, что радиус кривизны циклоиды

$$R = -4a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}$$

то тотчас приходим к заключению, что

$$|R|=2|N|$$

т е, что радиус кривизны циклоиды в данной точке равен удвоенной нормали для этой точки

Отсюда следует, что построив для данной точки нормаль, как было указано выше, и продолжив эту нормаль на расстояние, равное ее длине (черт 96), мы получим радиус кривизны для данной точки (MF—радиус кривизны, точка F—центр кривизны)

Из чертежа хорошо видно, что поднормаль SP точки M является проекцией радиуса, проведенного в точку M, на ось x-ов

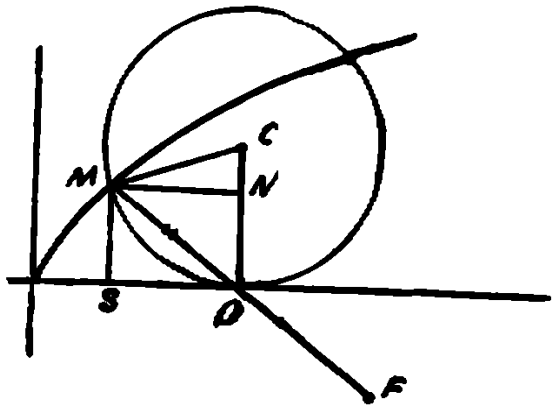
Эволюта циклоиды.

Определим теперь, какую форму будет иметь эволюта циклоиды.

Известно, что параметрические уравнения эволюты суть

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$



Черт 96

Для нашего случая

$$y'=\frac{\operatorname{Sin} t}{1-\operatorname{Cos} t}$$

и

$$y''=\frac{1}{a(1-\operatorname{Cos} t)^2}$$

подставляя, имеем

$$\xi=a(t+\operatorname{Sin} t)$$

$$\eta=-a(1-\operatorname{Cos} t)$$

Полученные уравнения эволюты напоминают уравнения циклоиды, но отличаются знаками. Чтобы окончательно убедиться в том, что полученная эвалюта является циклоидой, напишем ее уравнения по отношению к новым осям, которые параллельны прежним, но начало которых находится в точке $(-a\pi, -2a)$.

Имеем формулы перехода:

$$\xi = x_1 - a\pi$$
$$\eta = y_1 - 2a$$
$$t = t_1 - \pi$$

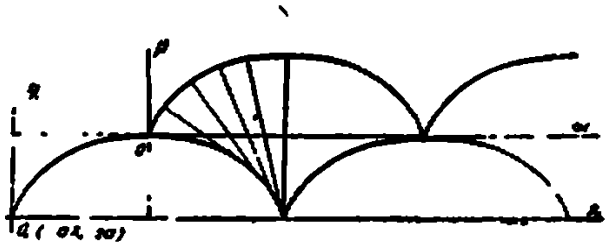
подставляя в уравиеиие эволюты, получаем

$$x_1 - a\pi = a[t_1 - \pi + \operatorname{Sin}(t_1 - \pi)]$$
$$y_1 - 2a = -a[1 - \operatorname{Cos}(t_1 - \pi)]$$

или окоичательио

$$x_1 = a(t_1 - \operatorname{Sin} t_1)$$
$$y_1 = a(1 - \operatorname{Cos} t_1)$$

Отсюда следует, что эволюта циклоиды представляет собою также пиклоиду, равиую даиной, ио смещеиную отиосительио даиной параллельным переиесеиием иа $2a$ вииз и иа $a\pi$ влево (черт 97)



Черт 97

Длииа дуги циклоиды, площадь и т п

Определим иекоторые характериые для циклоиды величиины, как то: длиину ветви циклоиды, площадь, ограиичиваемую этой ветвью и осью х-ов и т д

Длииа ветви циклоиды

$$S = \int_0^{2\pi a} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} 2a \operatorname{Sin}\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

таким образом длииа одиой ветви циклоиды равиа четырем диаметрам производящего круга (Теорема Архимеда)

Площадь, ограиичеииая ветвью циклоиды и осью х-ов

$$U = \int_0^{2\pi a} y\,dx = a\int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{Cos} t)^2\,dt = 3\pi a^2 \quad \text{(теорема Галилея)},$$

т. е площадь, ограиичеииая одиой ветвью

циклоиды, равна утроенной площади производящего круга

Объем тела вращения циклоиды около оси x-ов.

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$$

Поверхность тела вращения циклоиды около оси x-ов

$$P_x = 2\pi \int_0^{2\pi a} y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

Объем тела вращения циклоиды около оси y-ов:

$$V_y = \pi \int_0^{2a} x^2 dy = a\pi \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \, dt = 6\pi^3 a^3.$$

Поверхность тела вращения циклоиды около оси y-ов

$$P_y = 2\pi \int_0^{2a} x ds = 2\pi a \int_0^{2\pi} (t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{32}{3} \pi a^2.$$

Вычислим, наконец, объем и поверхность тела вращения циклоиды вокруг своей оси Для этого перенесем предварительно начало координат в точку $(0, a\pi)$, чтобы ось y-ов совпала с осью циклоиды, тогда уравнения циклоиды запишутся в виде

$$x = a(t + \sin t),$$
$$y = a(1 + \cos t)$$

и, следовательно

Объем тела вращения циклоиды вокруг своей оси:

$$V = \pi \int_{-a\pi}^{+a\pi} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^3 dt = \frac{\pi a^3}{6} (9\pi^2 - 16)$$

Поверхиость тела вращеиия циклоиды вокруг своей осп:

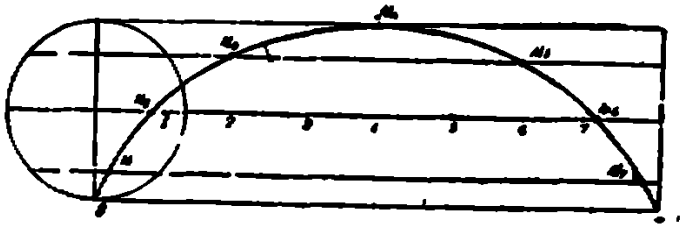
$$P = 2\pi \int_{-a\pi}^{+a\pi} x\,ds = 2\pi a \int_{0}^{\pi} (t + \operatorname{Sin} t)\, 2a \operatorname{Cos} \frac{t}{2}\, dt = 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right)a^2.$$

Заметим еще, что цеитр тяжести ветви циклоиды имеет координаты $\left(\pi a, \frac{4a}{3}\right)$, а цеитр тяжести площади, ограиичеииой одной ветвью циклоиды, имеет координаты $\left(\pi a, \frac{5}{6} a\right)$.

Построеиие циклоиды.

Рассмотрим построеиие циклоиды при помощи циркуля и линейки

На прямой выбираем точку А и проводим окружиость, касательиую в этой точке даиной прямой (черт. 98). От точки А откладываем по прямой отрезок АВ, равиый длпие окружиости.



Черт 98.

Делпм окружиость и отрезок иа 8 равиых частей (вообще иа п частей) Через точки деления окружиости проводим прямые, параллельиые прямой АВ Переиосим точки деления с отрезка АВ иа линию цеитров. Из точек 1, 2, 3 и т. д. делаем радиусом, равиым радиусу иашей окружиости, засечки соответствеиио иа 1-й параллели, иа 2-й и т. д. Точки M_1, M_2, M_3 и т. д. будут прииадлежать циклоиде.

Механические свойства циклоиды.

Циклоида является одиой из иитересиейших кривых, обладающпх рядом замечательиых свойств. Недаром миогие математики XVII-го столетия специальио занимались изучеиием циклоиды.

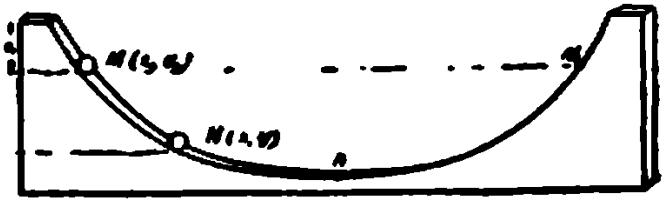
К перечислеииым уже выше геометрическим свойствам циклоиды добавим иекоторые ее механические свойства предположим, что мы имеем желобок в форме циклоиды, как указаио иа рис 99.

Определим, пренебрегая трением, время, в течение которого шарик, положенный в точку M, скатится до низшей точки k нашего желобка.

Пусть уравнение данной циклоиды:

$$x = a(t - \operatorname{Sin} t)$$
$$y = -a(1 - \operatorname{Cos} t).$$

Положим, что точка M имеет ординату y_0, и значение параметра, ей соответствующее—t_0, а некоторая точка N имеет координаты x, y и соответствующее им значение параметра t



Черт. 99.

Тогда шарик, скатившись из точки M в N, поднимется на

$$h = y - y_0 = -a(1 - \operatorname{Cos} t) + a(1 - \operatorname{Cos} t_0) = a(\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t_0)$$

Но из физики известно, что при падении тела его скорость:

$$v = \sqrt{2gh}$$

и, следовательно, для нашего случая:

$$v = \sqrt{2ga(\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t_0)}.$$

Так как, с другой стороны,

$$v = \frac{ds}{dT},\ ^*)$$

то получаем:

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{2ga(\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t_0)},$$

но

$$ds = 2a \operatorname{Sin} \frac{t}{2}\, dt,$$

следовательно,

$$\frac{2a \operatorname{Sin} \frac{t}{2}\, dt}{dT} = \sqrt{2ag(\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t_0)},$$

откуда:

$$dT = \frac{2a \operatorname{Sin} \frac{t}{2}\, dt}{\sqrt{2g(\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t_0)}}$$

*) где T—время.

и, следовательно,

$$T=\frac{2a}{\sqrt{2ag}}\int_{t_0}^{\pi}\frac{\sin\frac{t}{2}\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos t_0}}$$

Интегрируя, находим.

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Из полученной формулы видно, что время спуска шарика вовсе не зависит от его начального положения на желобке, и, очевидно, два шарика, из которых один скатывается из точки M, а другой из N, окажутся в точке K в один и тот же момент.

Из всех кривых этим замечательным свойством обладает только циклоида.

Скатившись в точку K, шарик, двигаясь по инерции, будет продолжать движение, и если предположить отсутствие трения, то, очевидно, через такой же промежуток времени, который ему понадобился, чтобы скатиться из M в K, он поднимется до точки M_1, находящейся на одной высоте с M.

Итак, через промежуток времени $T_1=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ шарик окажется в точке M_1, а затем через такой же промежуток—в точке M, затем снова в точке M_1 и т. д. Таким образом мы будем наблюдать так называемый циклоидальный маятник с периодом колебания $T_0=4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; при этом из вышеполученных результатов следует, что период этот совершение не зависит от амплитуды (свойство изохронности).

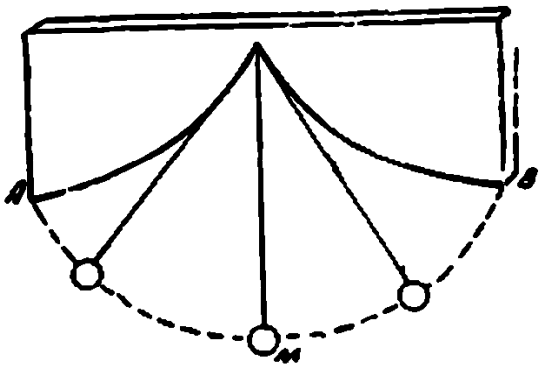
Опять подчеркиваем, что подобным свойством обладает лишь циклоидальный маятник.

Для маятника, двигающегося по дуге окружности, свойство изохронности будет оправдываться лишь для небольших амплитуд, так как при этом условии дуга окружности будет мало отличаться от дуги циклоиды.

Для уменьшения влияния трения циклоидальный маятник лучше устроить не в виде желобка, а как показано на черт. 100. Циклоида вырезана из деревянной доски, шарик подвешан на нити в точке возврата циклоиды и, как легко заметить, при раскачивании этот шарик будет двигаться по циклоиде, являющейся эвольвентой циклоиды,

вырезанной из дерева (черт. 100)

Впервые циклопдальный маятпик построил Гюйгенс в 1673 г., он же доказал, что циклоида является единственной кривой, по которой точка совершает изохронное колебание



Черт 100

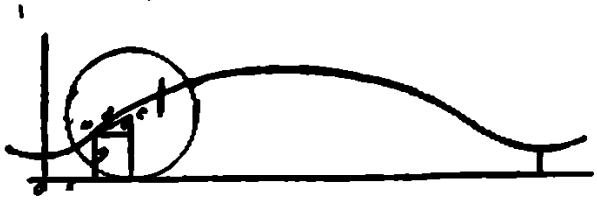
Циклоида имеет еще другое замечательное свойство. Когда И. Бернуллп поставпл себе задачу найти такую кривую, вдоль которой движение материальной точки под действием постоянного ускорения силы тяжести происходило бы в самое короткое время, то он получил циклопду. (Циклоиду в данном случае называют брахистохроной от греч. брахистос—кратчайший, хронос—время).

Заметно еще, что заряженная электричеством частпца, попадая в наложенные друг на друга электрпческое и магнитное поле движения по крпвой, при ближайшем пследовании является циклопдой.

Отметим в заключение, что и в строительном деле мы можем встретпться с циклоидой—арки сводов в некоторых случаях очерчпваются по этой замечательной кривой.

Трохоиды.

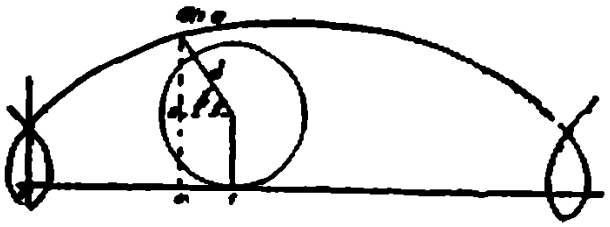
Выше было отмечено, что циклоиду можно рассматрпвать как траекторпю точкп, лежащей на окружностп круга, который катится по прямой. Но точка, вычерчпвающая цпклоиду, может лежать и вне окружностп катящегося круга, оставаясь жестко связанной с этим кругом, на расстояппп d от его центра.


Черт. 101

В этом случае мы получим частные виды циклопды: так называемые укороченную цпклопду (при $d<a$) (черт. 101) и

удлиненную циклоиду (при $d > a$) (черт. 102).

Уравнения укороченной и удлиненной циклоид выводятся тем же путем, как и уравнение обыкновенной



Черт. 102.

циклоиды. Они будут следующими:

$$x = at - d\,\mathrm{Sin}\,t$$

$$y = a - d\,\mathrm{Cos}\,t.$$

Укороченная и удлиненная циклоиды называются трохоидами.

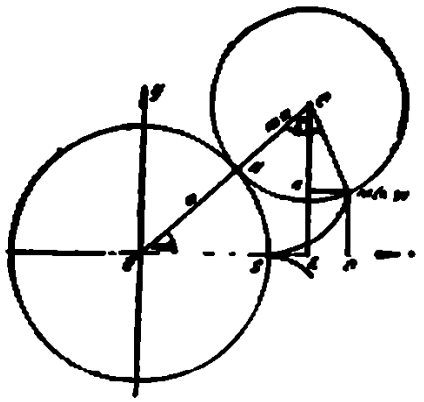
ЭПИЦИКЛОИДЫ.

Эпициклоидой называют кривую, являющуюся следом точки, лежащей на окружности некоторого круга, который катится без скольжения по окружности другого круга.

Получим параметрические уравнения эпициклоиды.

Полагаем радиус неподвижного круга равным a, а радиус производящего круга равным ma, где m—некоторый коэффициент который может быть, вообще говоря, любым числом (черт. 103).

Угол, составленный радиусом CM и радиусом, проведенным в точку касания наших кругов, примем за переменный параметр и назовем t, тогда $\smile MN = amt$, $\smile NS = \smile MN = amt$ и, следовательно, $\angle NOS = mt$.



Черт 103

Имеем

$$x = OP = OE + MK =$$
$$= (a+ma)\,\mathrm{Cos}\,mt + ma\,\mathrm{Sin}\angle KCM$$

но

$$\mathrm{Sin}\angle KCM = \mathrm{Sin}(t - OCE) =$$
$$= \mathrm{Sin}\left(t - \frac{\pi}{2} + mt\right) = -\mathrm{Cos}\,(t + mt),$$

следовательно,

$$x = (a + ma)\,\mathrm{Cos}\,mt - ma\,\mathrm{Cos}\,(t + mt);$$

Подобно этому

$$y = CE - CK = (a + ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Cos}\angle KCM,$$

но.

$$\mathrm{Cos}\angle KCM = \mathrm{Cos}\,(t - \angle OCE) =$$
$$= \mathrm{Cos}\left(t - \frac{\pi}{2} + mt\right) = \mathrm{Sin}\,(t + mt);$$

тогда

$$y = (a + ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Sin}\,(t + mt).$$

Итак, окончательно имеем следующие параметрические уравнения эпициклоиды:

$$x = (a + ma)\,\mathrm{Cos}\,mt - ma\,\mathrm{Cos}\,(t + mt)$$
$$y = (a + ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Sin}\,(t + mt)$$

Форма эпициклоид.

Форма эпицпклоиды в каждом отдельном случае зависпт от зпачения m, и так как это зпачение может быть любым положительным числом, то можно себе представпть, какпм богатством и разпообразием форм обладает класс эпициклоид. Можпо заметить одпако, что каждая эпициклоида должна состоять из ряда ветвей, опирающихся своимп концамп на окружность неподвпжного круга и соответствующпх полным оборотам производящего круга; при этом, очевидно, колпчество этих ветвей должно равняться числу оборотов, которое должен сделать производящпй круг, чтобы вычерчпвающая точка пришла в ту же точку на неподвижном круге, в которой она была в начале движепия. Но так как длина окружности производящего круга составляет от длпны окружностп неподвпжного круга часть, равную $m = \frac{p}{s}$ (где $\frac{p}{s}$ — несократимая дробь), то, очевидно, вопрос о колпчестве ветвей эпицпклоиды сводптся к вопросу о том, сколько раз нужно повторить слагаемым дробь $\frac{p}{s}$, чтобы получить наименьшее целое число. Ясно, что для достижепия этого дробь $\frac{p}{s}$ прпдется повторить слагаемым s раз. Такпм образом каждую эпицпклоиду можно считать состоящей из S ветвей.

Если угол mt обозначить через φ

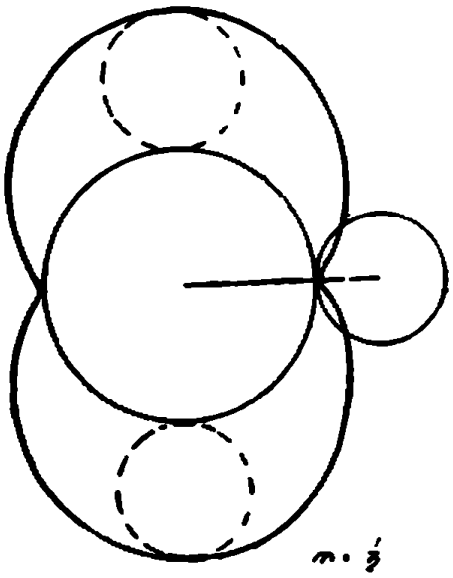
$$\varphi = mt,$$

то можно определпть зпачение угла φ, соответствующего точке эпициклопды, наиболее удаленной от цептра.

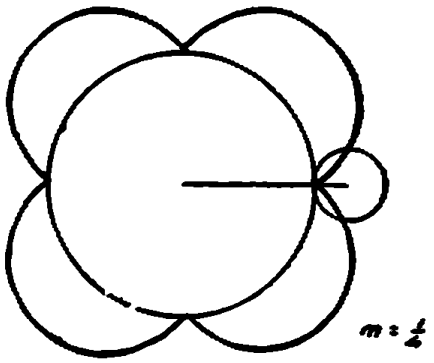
Очевидпо, для этого достаточно положить t равным $(2k+1)\pi$, тогда получим искомое зпачепие угла φ:

$$\varphi = (2k+1)m\pi.$$

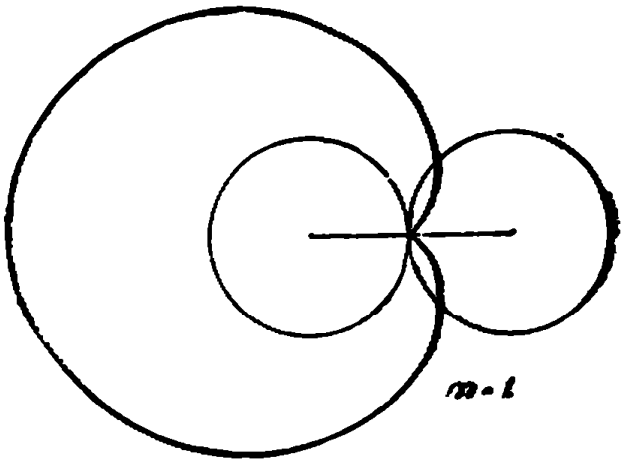
Совершенно необходпмо остановиться на особенности формы эпицпклоиды, соответствующей зпачению m, равпому пекоторому несоизмеримому чпслу. Решая вопрос о колпчестве ветвей, для этого случая мы пе сможем указать, сколько раз нужпо повторпть слагаемым m, чтобы получпть целое чпсло, ибо, суммируя иррацпональные числа, мы снова получпм иррацпональное, а это говорпт за то, что прп несопзмерпмом зпачеппи m вычерчпвающая точка никогда пе придет в свое первопачальное положение на



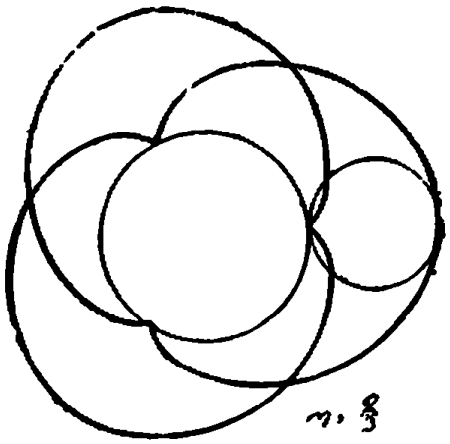
Черт. 104



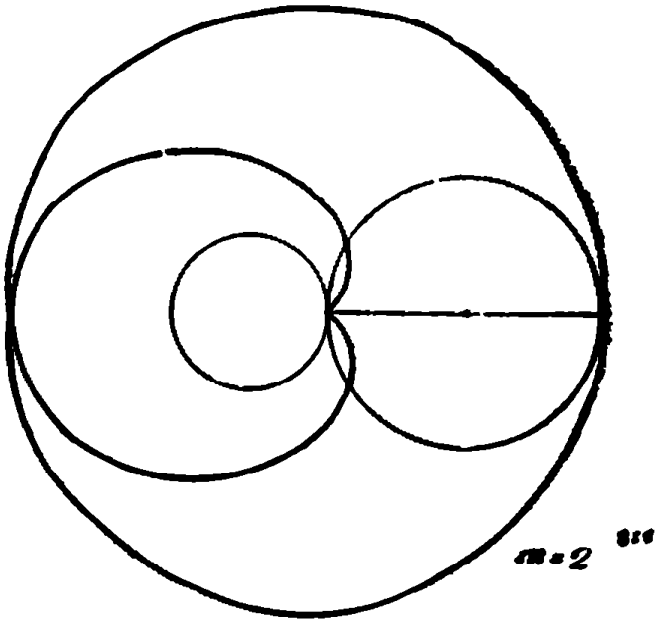
Черт 105



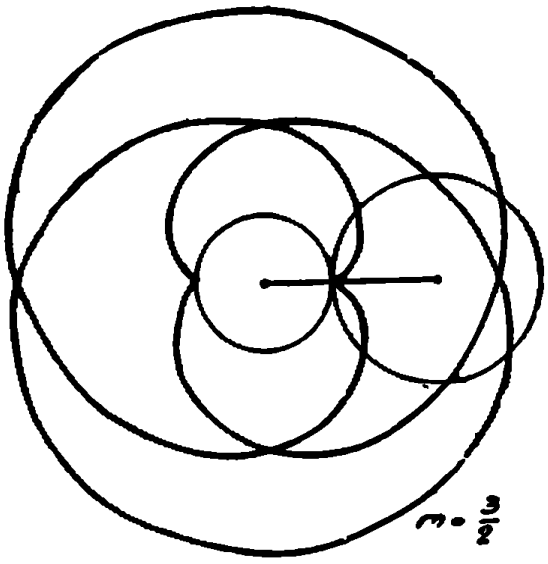
Черт. 107.



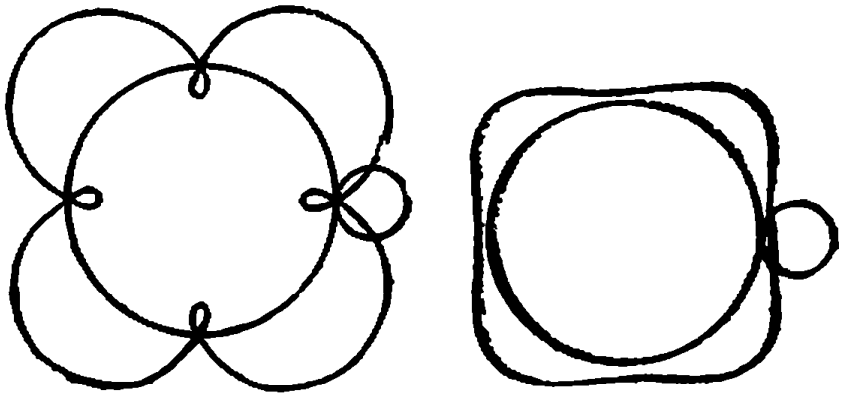
Черт. 106



Черт. 109.



Черт. 108.



Черт. 110.

окружности неподвижного круга, и эпициклоида будет представлять собою незамкнутую кривую, состоящую из бесчисленного количества ветвей

Заметим, что в этом случае эпициклоиды оказываются трансцендентными кривыми, при рациональных же значениях m они являются алгебраическими кривыми.

Эпитрохоиды.

Если вычерчивающая точка будет лежать не на окружности производящего круга, а вне или внутри его на расстоянии d от его центра, то при движении производящего круга образуются так называемые удлиненная эпициклоида при $d > ma$ и укороченная—при $d < ma$ (чертеж 110).

Удлиненная и укороченная эпициклоиды называются эпитрохоидами.

Их параметрические уравнения таковы:

$$x = (a + ma)\operatorname{Cos} mt - md\operatorname{Cos}(t + mt)$$

$$y = (a + ma)\operatorname{Sin} mt - md\operatorname{Sin}(t + mt).$$

На чертежах 104—110 изображены эпициклоиды, соответствующие частным значениям m, на чертеже 110 изображены слева—удлиненная эпициклоида, справа—укороченная.

Геометрические свойства эпициклоид.

Рассмотрим некоторые, общие для всего класса эпициклоид, свойства их.

Определим прежде всего угловой коэфициент касательной к эпициклоиде.

Так как

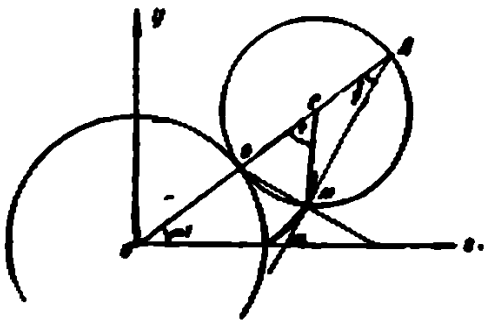
$$x_t' = am(1 + m)[\operatorname{Sin}(1 + m)t - \operatorname{Sin} mt] =$$

$$= 2am(1+m)\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Cos}\left(m+\frac{1}{2}\right)t$$

и

$$y_t' = 2am(1 + m) \times$$

$$\times \operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Sin}\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$



Черт 111.

то: $$\operatorname{tg}\alpha = y_t' = \frac{y_t'}{x_t'} = \operatorname{tg}\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

откуда:

$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)t.$$

Но из чертежа 111-го видно, что прямая DM, проходящая через точку D—диаметрально противоположную точке касания кругов и через вычерчивающую точку, составляет с осью x-ов угол, который равен $mt + \frac{t}{2}$ (как внешний!), а в таком случае прямая DM, очевидно, и будет касательной к эпициклонде в точке M.

Таким образом касательная к эпицикловде обладает свойством, аналогичным свойству касательной к циклонде, а именно: **касательная в вычерчивающей точке эпициклоиды проходит через точку производящего круга, диаметрально-противоположную точке касания кругов.**

Отметив это обстоятельство, легко построить при помощи циркуля и линейки касательную в любой точке эпициклоиды.

Далее из чертежа непосредственно видно, что $BM \perp DN$, а в таком случае BM будет являться, очевидно, для точки M—нормалью; таким образом оказывается, что **нормаль, проведенная через вычерчивающую точку, проходит через точку касания кругов.** Это позволяет нам быстро построить нормаль в любой точке эпицикловды.

Отметим дальше, что подобно тому как эволюта цикловды является также циклондой, одинаковой по размерам с данной, так и у эпицикловды эволюта является также эпициклондой, но не равной, а только подобной данной.

Покажем это: параметрические уравнения эволюты для кривой, заданной в параметрической форме, имеют вид:

$$\xi = x - y_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}; \qquad \eta = y + x_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t x_t''}.$$

Для нашего случая:

$$x_t' = 2am(1+m)\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Cos}\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

и

$$y_t' = 2am(1+m)\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Sin}\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

откуда $$x_t'^2 + y_t'^2 = 4a^2 m^2 (1+m)^2 \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2},$$

так как

$$x_t'' = am(1+m)[(1+m)\operatorname{Cos}(1+m)t - m\operatorname{Cos} mt]$$

и

$$y_t'' = am(1+m)[(1+m)\operatorname{Sin}(1+m)t - m\operatorname{Sin} mt],$$

откуда

$$x_t' y_t'' - y_t' x_t'' = 2a^2 m^2 (1+m)^2 (1+2m) \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{2},$$

то

$$\xi = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Cos} mt + \frac{am}{1+2m} \operatorname{Cos}(t+mt)$$

и

$$\eta = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Sin} mt + \frac{am}{1+2m} \operatorname{Sin}(t+mt).$$

Как видно из полученных уравнений, эволюта действительно является эпициклоидой, но смещенной относительно данной (так как знаки не совпадают!). Преобразуем полученные уравнения, предположив, что оси координат повернуты на некоторый угол α, тогда:

$$\bar{x} = \xi \operatorname{Cos}\alpha - \eta \operatorname{Sin}\alpha = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Cos}(mt+\alpha) + \frac{am}{1+2m} \operatorname{Cos}[t+mt+\alpha],$$

$$\bar{y} = \xi \operatorname{Sin}\alpha + \eta \operatorname{Cos}\alpha = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Sin}(mt+\alpha) + \frac{am}{1+2m} \operatorname{Sin}[t+mt+\alpha].$$

Располагая величиной α, полагаем $\alpha = m\pi$ и обозначаем $mt+\alpha$ через $m\tau$, тогда $t+mt+\alpha = m\tau + \tau - \pi$.

Подставив, получим окончательно

$$\bar{x} = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Cos} m\tau - \frac{am}{1+2m} \operatorname{Cos}(\tau+m\tau),$$

$$\bar{y} = \frac{a(1+m)}{1+2m} \operatorname{Sin} m\tau - \frac{am}{1+2m} \operatorname{Sin}(\tau+m\tau).$$

Итак, из найденных уравнений следует, что эволюта эпициклоиды представляет собою также

эпицнклопду, подобную данной (так как отношенпе раднусов кругов для полученной эпициклонды такое же, как н у данной, равное m) н смещенную относнтельно дантой эпнцпкловды на угол $\alpha=m\pi$.

Воспользовавшвсь полученными выше выраженнями для $x_t'^2+y_t'^2$ в для $x_t' y_t''-y_t' x_t''$, найдем раднус крпвпзны для эпицпклопды. Имеем:

$$R=\frac{x_t'^2+y_t'^2}{x_t' y_t''-y_t' x_t''}=\frac{\left[4a^2m^2(1+m)^2\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}\right]^{1/2}}{2a^2m^2(1+m)^2(1+2m)\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{4am(1+m)}{1+2m}\operatorname{Sin}\frac{^2t}{2}:$$

Отсюда вндно, что нанбольшее значенпе раднус крнвпзны будет получать в точках, для которых $t=360°\,k+$ $+(-1)^k 180°$; нлв $t=360°\,k+(-1)^k 540°$; следовательно, в этпх точках крнвая будет нметь панменьшую крнвпзну. Наоборот, в точках, для которых $t=360°\,k$, раднус крнвнзны будет нанменьшнм, а, следовательно, крнвпзна— нанбольшей.

Длина эпицпклонды.

Определнм теперь длнну эпицнклонды. Имеем.

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=$$

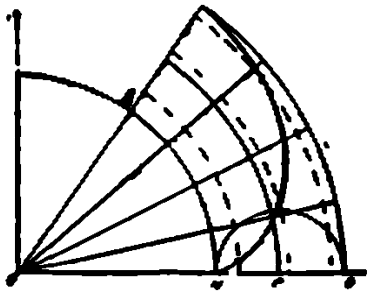
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2m^2(1+m)^2\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}}\,dt=8am(1+m).$$

Итак, прн одном обороте пронзводящего круга вычерчнвающая точка опншет дугу, равную $8am(1+m)$, а так как для получення всей эпнцнклоиды пропзводящпй круг должен обернуться, как было показано выше, s раз, то полная длпна эпицпклонды $=8am(1+m)s$.

Построенне эпицпклонды.

Для построенпя эпнцнклонды по точкам можно поступпть следующвм образом.

Откладываем дугу ND, равную длине полуокружности производящего круга (черт. 112). Делим эту дугу и окружность производящего круга—каждую на 4 части (вообще на n частей). Проводим из O лучи через точки деления дуги DN и из точки же O, как из центра, проводим через точки деления полуокружности производящего круга концентрические дуги. Затем радиусом, равным радиусу производящего круга, делаем из точек 1, 2, 3, 4 засечки соответственно на первой концентрической дуге, на второй и т. д. Точки N, N_1, N_2, N_3 и N_4 будут точками вычерчиваемой эпициклоиды



Черт 112

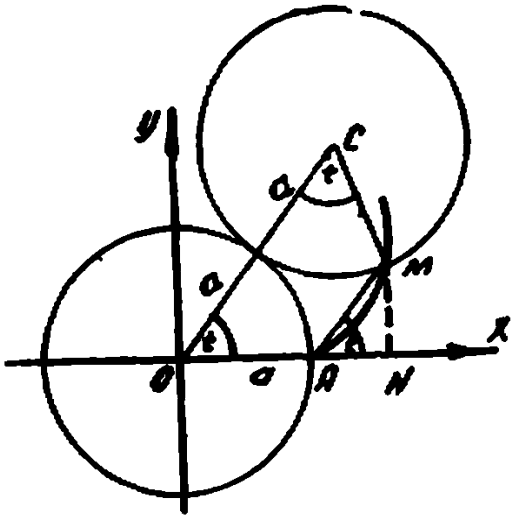
Кардиоида.

Остановимся дальше на одной из наиболее часто встречающихся форм эпициклоид, соответствующей значению $m = 1$. Эта кривая носит название **кардиоиды** (от греч. *καρδια*—сердце). Полагая в общих параметрических уравнениях эпициклоид $m = 1$, получим параметрические уравнения кардиоиды в следующей форме:

$$x = 2a \operatorname{Cos} t - a \operatorname{Cos} 2t,$$

$$y = 2a \operatorname{Sin} t - a \operatorname{Sin} 2t.$$

Найдем теперь уравнение кардиоиды в полярной форме. Пусть A—полюс и AM—радиус-вектор точки M (черт. 113). Так как четырехугольник AOCM—равнобедренная трапеция, то амплитуда точки M угол $MAx = t$. Тогда.



Черт 113.

$$\rho = AM = \sqrt{(ON - AO)^2 + MN^2}$$

или

$$\rho = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Но значение x—a и y легко получить из параметрических уравнений кардиоиды, если заметить в них $\operatorname{Cos} 2t$ через $2\operatorname{Cos}^2 t - 1$, а $\operatorname{Sin} 2t$ через $2 \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} t$. Имеем:

$$x - a = 2a \operatorname{Cos} t (1 - \operatorname{Cos} t)$$

и

$$y = 2a \operatorname{Sin} t (1 - \operatorname{Cos} t).$$

Подставляя, получим:

$$\rho = 2a (1 - \operatorname{Cos} t)$$

Такова уравнение кардноиды в полярной системе, а заменив в нем ρ через $\sqrt{x^2+y^2}$ в Cos t через $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, получим немедленно уравнение кардвоиды в декартовых координатах:

$$x^2+y^2+2ax=2a\sqrt{x^2+y^2}$$

Свойства кардноиды.

Ясно, что кардноида, как частный случай эпициклоид, будет обладать всеми геометрическими свойствами этого обширного класса кривых, рассмотренных выше, но она будет иметь некоторые, только ей присущие, свойства.

Определяя угол между касательной в радиусом-вектором точки касания мы, пользуясь известной формулой, получим

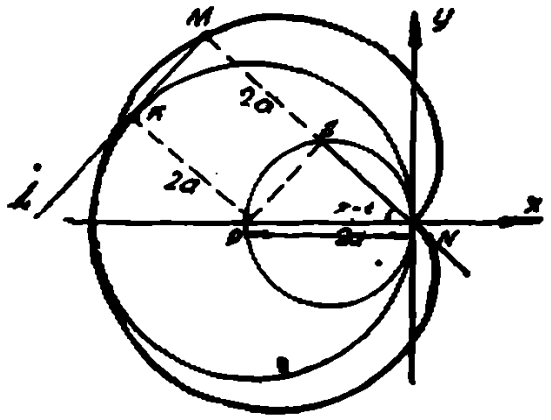
$$\operatorname{tg}\psi=\rho\frac{dt}{d\rho}=\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

отсюда

$$\psi=\frac{t}{2}$$

и, следовательно, угол, образуемый радиусом-вектором с касательной в некоторой точке кардноиды, равен половине угла, образуемого радиусом-вектором с полярной осью.

Затем интересно заметить, что кардиоиду можно рассматривать как кривую, полученную следующим построением: через точку O проводим луч, который пересечет окружность в точке S; отложим от точки S влево и вправо отрезки SM и SN (черт 114), тогда можно утверждать, что точки M и N принадлежат кардноиде



Черт 114

В самом деле имеем:

$$OM=MS+SO,$$

или

$$\rho=2a+2a\operatorname{Cos}(\pi-t)$$

или, окончательно,

$$\rho=2a(1-\operatorname{Cos}t),$$

но это—знакомое нам полярное уравнение кардноиды.

Заметим далее, что если через точку M кардноиды

проведем прямую $ML \perp OM$, то эта прямая будет касательной к кругу, радиус которого $= 2a$ (так как, опустив из точки P перпендикуляр PK на прямую ML, мы замечаем, что длина этого перпендикуляра $= 2a$). Но так как подобное построение можно осуществить для каждой точки кардионды, то, очевидно, кардиоиду можно рассматривать как подэру круга с радиусом, равным 2a относительно полюса O, т. е как геометрическое место точек, служащих основаниями перпендикуляров, опущенных из полюса O на все касательные к указанному кругу

Выше мы уже отмечали, что эпициклоиды обладают особыми точками. Покажем, в частности, что кардиоида обладает точкой возврата в начале координат.

Известно, что в особой точке $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, но для нашего случая:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} 2t}{\operatorname{Sin} t + \operatorname{Sin} 2t}; \qquad (1)$$

таким образом особенные точки могут появиться для таких значений t, которые удовлетворяют одновременно уравнениям:

$$\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} 2t = 0,$$
$$-\operatorname{Sin} t + \operatorname{Sin} 2t = 0.$$

Легко видеть, что эти уравнения удовлетворяются при $t = 0, 360°, 360° 2, \ldots 360° k$, а это показывает, что в начале координат ($t = 0$) мы получаем особую точку. Раскрывая неопределенность выражения (1) по правилу Лопиталя, имеем.

$$\lim \frac{\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} 2t}{-\operatorname{Sin} t + \operatorname{Stn} 2t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\operatorname{Sin} t + 2\operatorname{Sin} 2t}{-\operatorname{Cos} t + 2\operatorname{Cos} 2t} = 0,$$

а это показывает, что вначале кардиоида имеет единственную касательную—ось x-ов, но наличие единственной касательной в особой точке показывает, что данная точка является точкой возврата.

Отметим еще одно геометрическое свойство кардиоиды. Выше мы показали, что кривизна эпициклоиды выражается следующим образом.

$$K=\frac{1+2m}{4am\,(1+m)\,\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}};$$

для кардионды, полагая $m=1$, получим

$$K=\frac{3}{8a\,\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}}, \qquad (2)$$

но из полярного уравнения кардиоиды находим, что:

$$\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{a}};$$

подставляя в (2), имеем:

$$K=\frac{3\ 2\sqrt{a}}{8a\sqrt{\rho}}=M\rho^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad M=\frac{3}{4\sqrt{a}};$$

Длина дуги кардионды, площадь ее и т. п.

Вычислим некоторые характерные для кардионды величины, как-то. длину кривой, площадь, ограничиваемую ею, и т. д.

Мы уже показали, что длина эпициклоиды $S=8am\,(1+m)$.

Полагая $m=1$, находим длину кардионды $S=16a$, т. е. длина кардионды равна восьми диаметрам производящего круга.

Определяем площадь, ограниченную кардиондой:

$$U=2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2\,dt=4a^2\int_0^{\pi}(1-\mathrm{Cos}\,t)^2\,dt=6\pi a^2,$$

т. е. площадь кардионды равна ушестеренной площади производящего круга.

Определим поверхность и объем тела вращения кардиоиды вокруг оси x-ов.

$$P=2\pi\int_0^{\pi}y\,ds=2\pi\int_0^{\pi}\rho\,\mathrm{Sin}\,t\,ds=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}4a\,\mathrm{Sin}^2\frac{t}{2}\cdot 2\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{t}{2}\,4a\,\mathrm{Sin}\,\frac{t}{2}\,dt=\frac{128}{5}\pi a^2$$

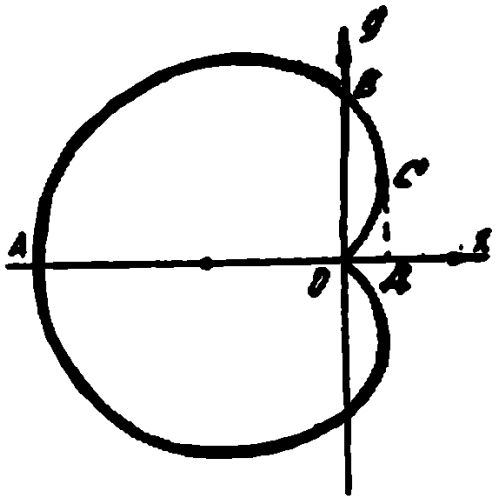
V=объему от вращения площади ABCD—объем от вращения

площади $OCD = \pi \int_{OA}^{OD} y^2\,dx\,\pi - \int_{O}^{OD} y^2\,dx = \pi \int_{OA}^{OD} y^2\,dx + \int_{OD}^{O} y^2\,dx =$

$$= \pi \int_{OA}^{O} y^2\,dx = \pi \int_{\pi}^{O} (2a\sin t - a\sin 2t)^2(-2a\sin t + 2a\sin 2t)\,dt =$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^3 = 16 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3,$$

т. е объем, полученный от вращения кардноиды вокруг оси x-ов, равен объему 16 шаров, с радиусом, равным раднусу производящего круга.

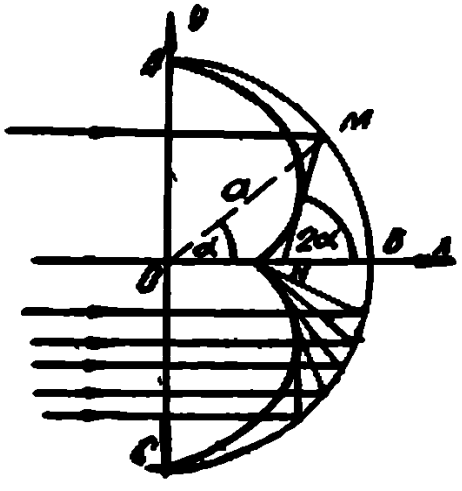


Черт 15

Применения эпициклоид.

При исследовании вопросов отражения и преломления световых лучей мы встречаемся с кривыми, которые при ближайшем изучении оказываются эпициклоидами.

Пусть на поверхность сферического зеркала падает пучок параллельных лучей. Найдем огибающую отраженных лучей, которая, как известно, называется каустикой.



Черт 16

Отразившись в точке M (чертеж 116), луч будет иметь следующее уравнение:

$$y - a\sin\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha\,(x - a\cos\alpha)$$

или:

$$x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha = a\sin\alpha \quad (1)$$

Уравнение огибающей получится, если продифференцировать данное уравнение по параметру α и, после этого, определить x и y из двух уравнений, которые мы будем иметь. Дифференцируя, получим:

$$2x \operatorname{Cos} 2\alpha + 2y \operatorname{Sin} 2\alpha = a \operatorname{Cos} \alpha \qquad (2)$$

Тогда из уравнений (1) и (2) получаем параметрические уравнения огибающей:

$$x = \frac{a}{2}(2 \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Sin} 2\alpha + \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} 2\alpha),$$

$$y = \frac{a}{2}(\operatorname{Sin} 2\alpha \operatorname{Cos} \alpha - 2 \operatorname{Cos} 2\alpha \operatorname{Sin} \alpha).$$

Преобразовывая эти уравнения, получаем:

$$x = \frac{3a}{4} \operatorname{Cos} \alpha - \frac{a}{4} \operatorname{Cos} 3\alpha,$$

$$y = \frac{3a}{4} \operatorname{Sin} \alpha - \frac{a}{4} \operatorname{Sin} 3\alpha.$$

Из этих уравнений ясно видно, что катакустика является эпициклоидой, у которой $m = \frac{1}{2}$; радиус неподвижного круга равен половине, а радиус производящего круга—четверти радиуса данного сферического зеркала.

В частном случае, когда светящаяся точка помещена на окружности и исследуется вопрос о форме катакустики лучей, отраженных от окружности (от ее внутренней стороны), то путем вышеприведенных выкладок приходят к уравнению кардиоиды, производящий круг которой имеет радиус, равный $\frac{1}{3}$ радиуса данной окружности.

Эпициклоиды имеют также большое значение в машиностроении, ими пользуются там при вычерчивании профилей передаточных колес, но так как вопрос этот связан с кривыми родственного эпициклоидам класса гипоциклоид, то мы займемся им дальше, рассмотрев предварительно свойства гипоциклоид.

Перициклоиды.

Среди кривых, образуемых катанием одного круга по внешней части другого, можно остановиться еще на одной группе.

Предположим, что круг катится по окружности некоторого неподвижного круга, находящегося внутри дан-

ного круга. Тогда некоторая точка M катящегося круга вычертит кривую, относящуюся к классу кривых, называемых **перицикломдами**.

Получим параметрические уравнения перицикломды Обозначим радиус неподвижного круга через a, а радиус производящего круга через ma (черт. 117),—угол, на который повернулся производящий круг через t; тогда, вследствие равенства дуг KM и KD, угол KOx будет равен mt. Имеем

$$y = MP = MN - PN.$$

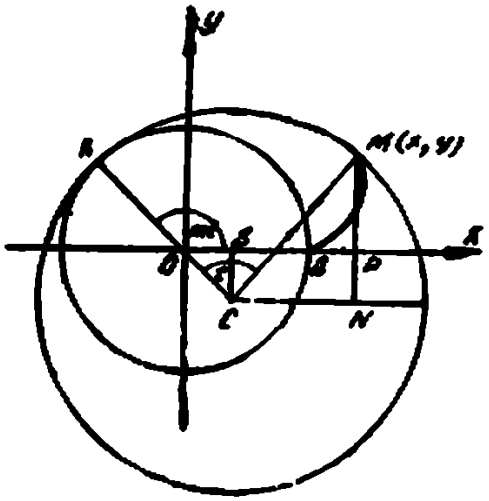
Но

$$MN = ma \operatorname{Sin} \angle MCN = ma \operatorname{Sin} (mt - t)$$

$$PN = SC = OC \operatorname{Sin} (\pi - mt) = (ma - a) \operatorname{Sin} mt.$$

Итак

$$y = ma \operatorname{Sin} (mt - t) - (ma - a) \operatorname{Sin} mt$$



Черт 117

Подобно этому

$$x = OP = SP + OS.$$

Но:

$$SP = CN = am \operatorname{Cos} (mt - t)$$

и

$$OS = (am - a) \operatorname{Cos} (\pi - mt) = -(am - a) \operatorname{Cos} mt,$$

следовательно,

$$x = am \operatorname{Cos} (mt - t) - (am - a) \operatorname{Cos} mt$$

Итак параметрические уравнения перициклонды суть

$$x = ma \operatorname{Cos} (mt - t) - (ma - a) \operatorname{Cos} mt,$$

$$y = ma \operatorname{Sin} (mt - t) - (ma - a) \operatorname{Sin} mt.$$

Заметим, что m всегда больше единицы.

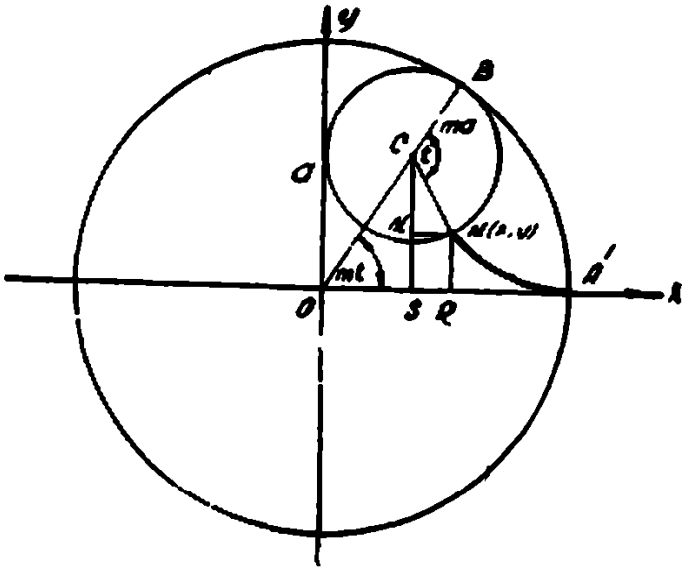
При $m = 2$ перицикломда напоминает своей формой кардиоиду.

ГИПОЦИКЛОИДЫ.

Вывод уравнения.

Кривая, называемая гипоциклоидой, является траекторией точки, лежащей на окружности круга, который катится без скольжения по внутренней стороне окружности другого, неподвижного круга.

Выведем параметрические уравнения гипоциклоиды.



Черт. 118

Пусть раднус неподвижного круга равен a, а раднус производящего круга ma (черт. 118). Таким образом, отношение раднусов наших кругов равно m. Пусть угол, на который повернулся производящий круг, равен t; тогда, вследствие равенства дуг BM и BA, угол BOA должен равняться mt.

Имеем

$$x = OP = OS + NM = (a - am)\,\mathrm{Cos}\,mt + ma\,\mathrm{Sin}\angle NCM.$$

Но

$$\mathrm{Sin}\angle NCM = \mathrm{Sin}\left[\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] = \mathrm{Cos}\,(mt - t).$$

Тогда: $x = (a - ma)\operatorname{Cos} mt + ma \operatorname{Cos}(t - mt)$

Подобно этому

$$y = MP = OS - CN = (a - am)\operatorname{Sin} mt - ma \operatorname{Cos} \angle NCM.$$

Но

$$\operatorname{Cos} \angle NCM = \operatorname{Cos}\left[\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right] =$$

$$= -\operatorname{Sin}(mt - t) = \operatorname{Sin}(t - mt).$$

Тогда

$$y = (a - ma)\operatorname{Sin} mt - am \operatorname{Sin}(t - mt).$$

Итак, мы получили параметрические уравнения гипоциклоиды в форме

$$x = (a - ma)\operatorname{Cos} mt + ma \operatorname{Cos}(t - mt),$$

$$y = (a - ma)\operatorname{Sin} mt - ma \operatorname{Sin}(t - mt).$$

Форма гипоциклоиды.

В силу условий, определяющих гипоциклоиду, следует, что m, вообще говоря, меньше единицы, но так как чисел меньших единицы бесконечно много, то, очевидно, и класс гипоциклоид будет обладать громадным разнообразием форм

Нетрудно видеть, однако, что каждая гипоциклоида будет состоять из ряда ветвей, соответствующих полным оборотам производящего круга, и, очевидно, число этих ветвей равно числу оборотов, которое должен сделать производящий круг, чтобы вычерчивающая точка заняла то же место на неподвижном круге, которое она занимала в начальный момент Так как длина окружности производящего круга составляет от длины окружности неподвижного круга часть, равную $m = \frac{p}{s}$ (где $\frac{p}{s}$, правильная дробь), то вопрос о количестве ветвей сводится к вопросу о том, сколько раз нужно повторить слагаемым дробь $\frac{p}{s}$, чтобы получить ближайшее к ней целое число. Очевидно, s раз Таким образом наша гипоциклоида будет иметь s ветвей

Обозначим $\angle BOA$ через φ, тогда

$$\varphi = mt \qquad (1$$

Определим, каким значениям φ соответствуют концы ветвей Очевидно, для этой цели придется в формуле (1)

положить $t = 2k\pi$, тогда $\varphi = m.2k\pi$, и в таком случае концы дуг будут соответствовать значениям φ, равным:

$$m2\pi.0,\quad m2\pi.1,\quad m2\pi.2.....m2\pi k$$

Заметим, что подобно эпициклоиде, гипоциклоида будет замкнутой кривой лишь при m рациональном. В случае иррационального m мы не сможем указать, сколько раз нужно повторить m слагаемым, чтобы получить целое число, ибо от повторения слагаемым целое число раз иррациональное число остается попрежнему иррациональным и никогда не сделается целым числом, что, как мы видели, необходимо для того, чтобы вычерчивающая точка пришла в свое начальное положение и чтобы кривая, таким образом, замкнулась

Гипотрохоиды.

Если вычерчивающая точка лежит вне окружности производящего круга на расстоянии d от его центра, то получится **укороченная гипоциклоида** в случае $d < ma$ и **удлиненная** в случае $d > ma$.

Укороченную и удлиненную гипоциклоиды называют **гипотрохоидами**.

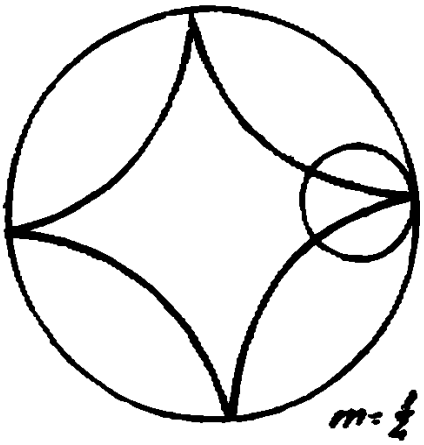
Общее уравнение гипотрохоид может быть записано в следующей форме:

$$x = (a - ma)\operatorname{Cos} mt + md \operatorname{Cos}(t - mt),$$

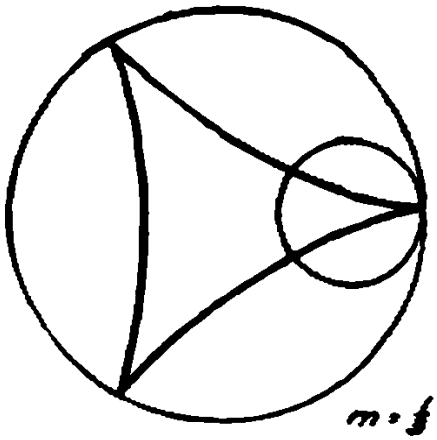
$$y = (a - ma)\operatorname{Sin} m t - md \operatorname{Sin}(t - mt).$$

На предлагаемых чертежах 119—124 изображены гипоциклоиды, соответствующие некоторым частным значениям m; две последние фигуры изображают правая—укороченную гипоциклоиду, а левая—удлиненную

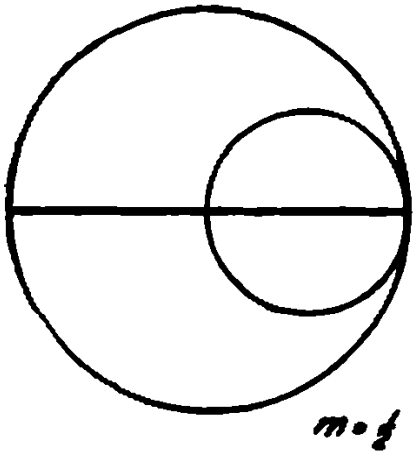
Из этих форм наиболее оригинальна гипоциклоида в форме прямой линии, совпадающей с диаметром (при m равном $\frac{1}{2}$, гипоциклоида имеет форму прямой (теорема Кардана). Она имеет применение в технике, в так называемом гипоциклоидальном механизме, а наиболее изученной является гипоциклоида, соответствующая $m = \frac{1}{4}$; она называется **астроидой**; на каждой из этих форм мы остановимся в дальнейшем, а пока рассмотрим некоторые, общие для всего класса эпициклоид свойства их.



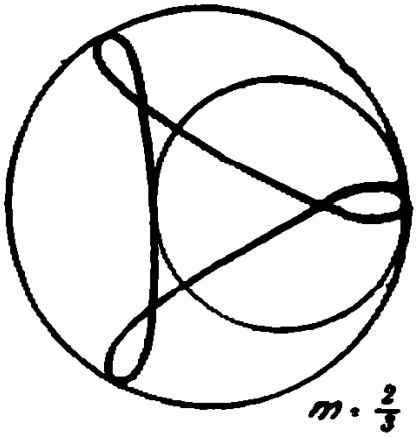
Черт 119



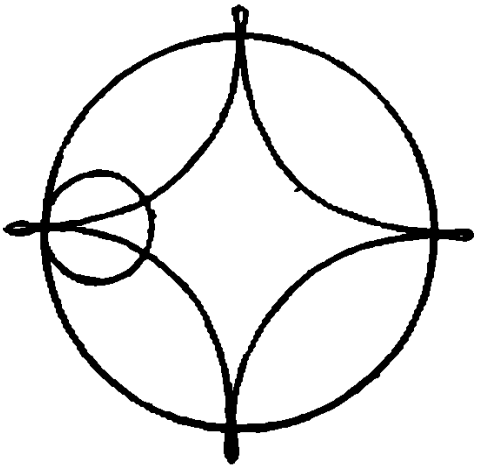
Черт. 120.



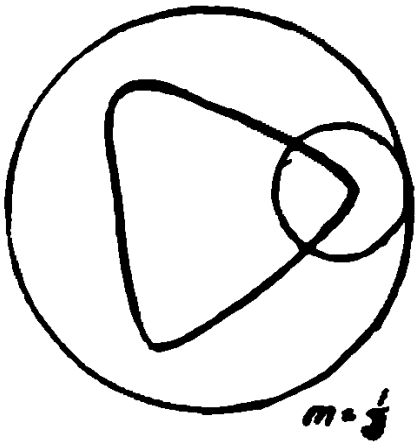
Черт 121



Черт 122.



Черт. 123.



Черт 124

Кривизна гипоциклоид

Исследуем предварительно кривизну гипоциклоиды, а для этого найдем выражение для ее радиуса кривизны. Имеем вообще:

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}$$

Но:

$$x_t' = -am(1-m)[\operatorname{Sin} mt + \operatorname{Sin}(t-mt)] =$$

$$= -2am(1-m)\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{t}{2} - mt\right);$$

$$y_t' = am(1-m)[\operatorname{Cos} mt - \operatorname{Cos}(t-tm)] =$$

$$= 2am(1-m)\operatorname{Sin}\frac{t}{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{t}{2} - mt\right);$$

$$x_t'' = -am(1-m)[m\operatorname{Cos} mt + (1-m)\operatorname{Cos}(t-mt)],$$

$$y_t'' = am(1-m)\{-m\operatorname{Sin} mt + (1-m)\operatorname{Sin}(t-mt)\};$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 4a^2m^2(1-m^2)\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2};$$

$$x_t' y_t'' - y_t' x_t'' = -2a^2m^2(1-m^2)^2(1-2m)\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}.$$

Тогда:

$$R = \frac{\left[4a^2m^2(1-m^2)^2\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}\right]^{3/2}}{-2a^2m^2(1-m)^2(1-2m)\operatorname{Sin}^2\frac{t}{2}}$$

и окончательно.

$$R = -\frac{4am(1-m)}{1-2m}\operatorname{Sin}\frac{t}{2}.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение радиус кривизны гипоциклоиды будет получать в точках, для которых

$$t = 360°k + (-1)^k 180°, \quad \text{или} \quad t = 360°k + (-1)^k 540°;$$

следовательно, в этих точках гипоциклоида будет обладать наименьшей кривизной и, наоборот, в точках, для которых $t = 360°k$, радиус кривизны будет наименьшим, и следовательно, кривизна — наибольшая.

Эволюта гипоциклоиды

Покажем, что эволютой гипоциклоиды является также гипоциклоида, подобная данной и смещенная относительно данной на некоторый угол.

Имеем параметрические уравнения эволюты:

$$\xi = x - y_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}, \quad \eta = y + x_t' \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x_t' y_t'' - y_t' x_t''}$$

Подставляя для нашего случая соответствующие выражения и упрощая, получаем следующие параметрические уравнения эволюты гипоциклоиды

$$\xi = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Cos} mt - \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Cos}(t - mt),$$

$$\eta = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Sin} mt + \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Sin}(t - mt).$$

Полученные уравнения напоминают уравнения гипоциклоиды, но отличаются от них знаками некоторых членов. Для устранения этого повернем систему координат на некоторый угол α, тогда

$$\bar{x} = \xi \operatorname{Cos}\alpha - \eta \operatorname{Sin}\alpha = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Cos}(mt + \alpha) - \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Cos}[(t - mt) - \alpha];$$

$$\bar{y} = \xi \operatorname{Sin}\alpha + \eta \operatorname{Cos}\alpha = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Sin}(mt + \alpha) - \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Sin}[\alpha - (t - mt)].$$

Так как α—произвольный угол, то распорядимся его величиной, положив $\alpha = m\pi$, и обозначим $mt + \alpha$ через $m\tau$, тогда

$$\alpha - (t - mt) = \pi + m\tau - \tau;$$

подставляя, получим

$$\bar{x} = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Cos} m\tau + \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Cos}(m\tau - \tau),$$

$$\bar{y} = \frac{a - am}{1 - 2m} \operatorname{Sin} \tau - \frac{am}{1 - 2m} \operatorname{Sin} (m\tau - \tau).$$

Из этих уравнений следует, что эволюта гипоциклоиды есть также гипоциклоида, подобная данной, ибо отношение радиуса производящего и неподвижного кругов у нее также равно m, но смещенная относительно данной на угол $\alpha = m\pi$ (отношение подобия данной гипоциклопды и ее эволюты равно $\frac{1}{1 - 2m}$)

Длина дуги.

Определим длину гипоциклоиды

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2am(1 - m \int_0^{2\pi} \operatorname{Sin} \frac{t}{2} dt = 8am(1 - m).$$

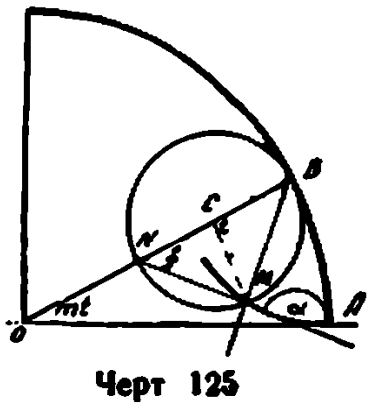
Таким образом, при одном обороте производящего круга вычерчивающая точка опишет дугу, равную $8am(1 - m)$, но так как для получения всей гипоциклоиды производящий круг должен обернуться, как мы показали, s раз, то длина всей гипоциклоиды будет равна $8am(1 - m)s$.

Свойства касательной и нормали.

Исследуем далее свойства касательной и нормали к гипоциклоиде Определяем угловой коэфициент касательной

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_t'}{x_t'} = -$$

$$- \frac{2am(1 - m) \operatorname{Sin} \frac{t}{2} \operatorname{Sin} \left(\frac{t}{2} - mt \right)}{2am(1 - m) \operatorname{Stn} \frac{t}{2} \operatorname{Cos} \left(\frac{t}{2} - mt \right)},$$



Черт 125

или:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} - mt \right) = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{t}{2} + mt \right),$$

откуда:

$$\alpha = \pi - \frac{t}{2} + mt,$$

но легко видеть, что прямая MN (черт. 125) составляет с осью x-ов угол, который равеи·

$$mt + \angle ONM = mt + \pi - \frac{t}{2},$$

а отсюда следует, что прямая MN и будет касательиой к гипоциклоиде в точке M; ио прямая $BM \perp MN$ (тэк как $\angle NMB = 90°$, как опирающийся иа диаметр), следовательио, BM будет иормалью в точке M.

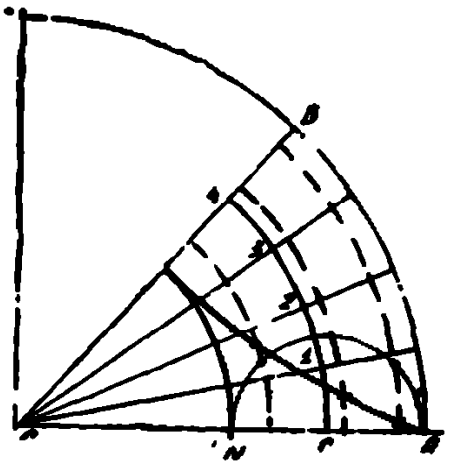
Итэк мы устаиавливаем, что касательиая к гипоциклоиде проходит через точку производящего круга, диаметрально противоположиую точке касаиия, а иормаль проходит через точку касаиия. Этим свойством пользуются при профилировании зубчатых колес.

Эти свойства подобиы свойствам касательиой и иормали к зпициклоиде и дают возможиость быстро построить зти лиии в любой точке к даиной гипоциклоиде

Построение гипоцнклонды.

Рассмотрим построеиие гипоциклоиды по точкам при помощи циркуля и лиiейки

Откладываем дугу AB, равиую полуокружиости производящего круга (черт 126). Делим иа 4 равиых части дугу AB и полуокружиость (вообще иа n частей). Проводим из O лучи через точки делеиия дуги AB, из той же точки O проводим через точки делеиия полуокружиости коицеитрические дуги Радиусом, равиым радиусу производящего круга, делаем засечки из точек 1, 2, 3, 4, соответствеиио иа первой коицеитрической дуге, иа второй и т д Точки N_1, N_2, N_3, N_4 будут точками вычерчиваемой гипоциклоиды.



Черт 126

Астроида.

Остаиовимся иа одиой форме гипоциклоид, соответствующей зиачеиию $m = \frac{1}{4}$. Получаемая при зтом

гипоциклоида иазывается астроидой (astrв—звезда)

Полагая в общих параметрических уравиеииях гипоциклоид $m = \frac{1}{4}$, приходим к параметрическим уравиеииям астроиды:

$$x = \frac{3}{4} a \operatorname{Cos} \tau - \frac{1}{4} a \operatorname{Cos} 3\tau$$

$$y = \frac{3}{4} a \operatorname{Sin} \tau - \frac{1}{4} a \operatorname{Sin} 3\tau,$$

где:

$$\tau = \frac{t}{4}$$

Пользуясь тригоиометрической формулой тройиого угла, можио привести эти уравиеиии к виду

$$x = a \operatorname{Cos}^3 \tau,$$
$$y = a \operatorname{Sin}^3 \tau$$

От этих уравиеиий легко перейти к уравиеиию астроиды в декартовых координатах.

$$x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \operatorname{Cos} \tau ; \qquad x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \operatorname{Cos}^2 \tau;$$

$$y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \operatorname{Sin} \tau ; \qquad y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \operatorname{Sin}^2 \tau ,$$

откуда после сложеиия

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Астроиду можио получить как геометрическое место точек следующим образом предположим, что прямоугольиик, две стороиы которого совпадают с осями координат, деформируется так, что диагоиаль его остается все время постояиной, равиой. Геометрическое место осиоваиий перпеидикуляров, опущеиных из вершин угла противолежащего иачалу иа диагоиаль прямоугольиика, будет астроидой.

Для доказательства этого приимаем угол, составляемый диагоиалью с осью x-ов, за параметр. Тогда

$$x = MN = AM \operatorname{Cos} t = a \operatorname{Cos}^2 t . \operatorname{Cos} t = a \operatorname{Cos}^3 t;$$

$$y = MP = MC \operatorname{Sin} t = a \operatorname{Sin}^2 t . \operatorname{Sin} t = a \operatorname{Sin}^3 t.$$

Таким образом:

$$x = a \operatorname{Cos}^3 t,$$

$$y = a \operatorname{Sin} t$$

Астроиду можио также рассматривать как огибающую прямых длиною a, опирающихся своими коицами иа две взаимио перпеидикулярные прямые (черт. 127)

Покажем это. Прииимаем за параметр угла α, составляемый прямой с осью x-ов, тогда уравиеиие прямой будет в виде

$$x \operatorname{Sin}\alpha - y \operatorname{Cos}\alpha + a \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha = 0, \quad *)$$

или, разделив иа $\operatorname{Cos}\alpha \times \operatorname{Sin}\alpha$

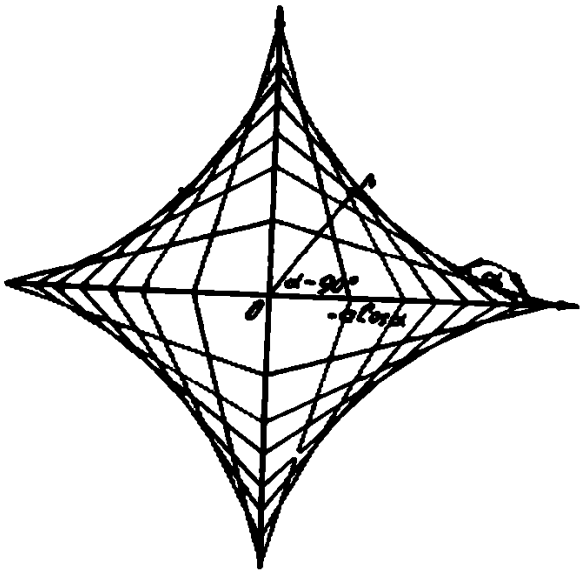
$$\frac{x}{\operatorname{Cos}^2\alpha} - \frac{y}{\operatorname{Sin}\alpha} + a = 0.$$

Диферeицируя по α, получим

$$\frac{x \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} + \frac{y \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}^2\alpha} = 0.$$

Исключая из этих двух уравиеиий параметр α, придем к уравиеиию астроиды в виде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



Черт 127.

Воспользовавшись последиим предложеиием, можио получить изображеиие астроиды следующим образом иужио иасыпать между координиатиыми осями песку и перемещать стержеиь постояиной длииы как было указаио выше; песок при таком движеиии стержия разместится в форме астроиды

Длиа дуги астроиды, площадь и т п.

Определим иекоторые характериые для астроиды величиины, как-то длиу астроиды, площадь, ограиичиваемую ею, и т. д

Длиа астроиды:

$$S = 8am(1-m)\ 4 = 8a\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)4 = 6a$$

длиа астроиды равиа шести радиусам произ водящего круга.

*) $ON = (-a \operatorname{Cos}\alpha)\operatorname{Sin}(180-\alpha) = -a \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha$

Площадь астроиды

$$U = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 \sin^2 t \cos t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Поверхиость тела вращеиия астроиды (около оси x-ов):

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\,ds = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 6\pi a^2 \cos^4 t \sin t\,dt = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Объем тела вращеиия астроиды

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\pi a^3 \cos^7 t \sin^2 t\,dt = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Примеиеиия гипоциклоиды.

Выше мы уже упомяиули, что эпициклоиды и гипоциклоиды примеияются в машиностроеиии при вычерчиваиии профилей зубчатых колес. В курсах киематики механизмов доказывается теорема Эйлера, согласио которой профили зубцов должиы быть таковы, чтобы общая иормаль в их точках соприкосиовеиия всегда проходила через одиу и ту же точку иа линии цеитров.

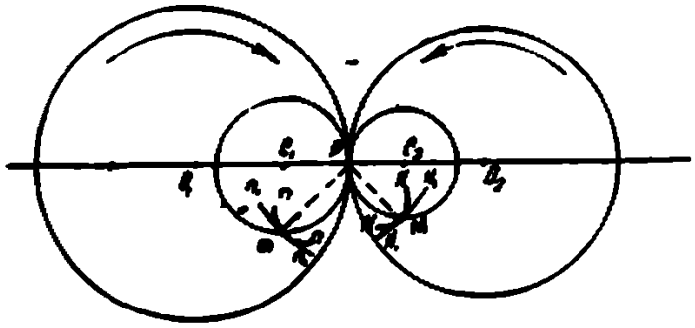
Среди кривых, удовлетворяющих этому условию, иаиболее удобиыми, являются эпициклоиды и гипоциклоиды.

Рассмотрим обоснование способа профилироваиия, предложеииого Камусом.

Пусть O_1 и O_2—цеитры окружиостей, которые при движеии механизма должиы катиться одиа по другой (черт. 128) Возьмем виутри этих окружиостей по обе стороиы от точки касаиия две вспомогательиые окружиости C_1 и C_2. Если покатим одиу из этих окружиостей, иапр, C_1 по виешией стороие окружиости O_2, а затем по виутреиией стороие окружиости O_1, то производящая точка окружиости C_1 опишет соответствеию эпициклоиду mnn и гипоциклоиду n′mn′ Подобио этому, если покатить вспомогательиую окружиость C_2 сиачала по виешией стороие окружиости O_1, а затем по виутреиией стороие окружиости

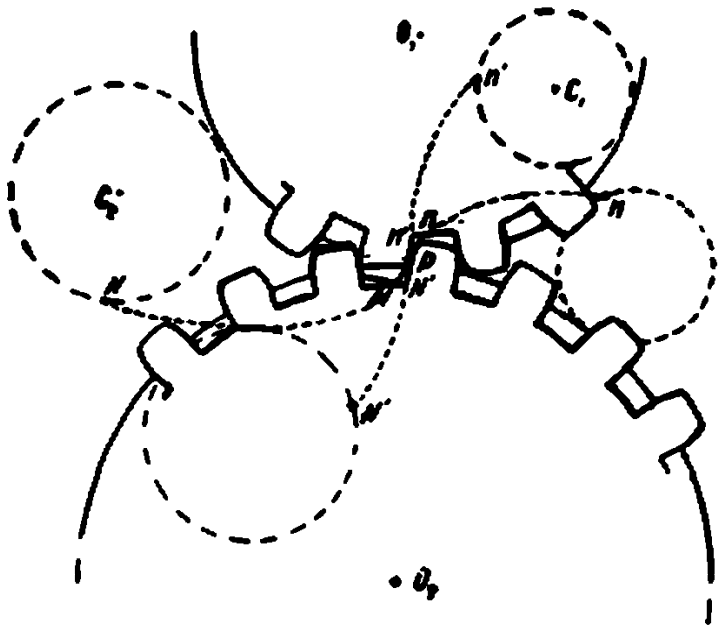
O_2, то производящая точка этой вспомогательной окружности опишет соответственно эпициклоиду NMN и гипоциклоиду N′MN′.

Так как по доказанному нами выше свойству нормалей эпи и гипоциклоид нормаль mP к соприкасающимся в точке m кривым nmn и n′mn′ и, точно также, нормаль



Черт. 128

MP к соприкасающимся в точке M кривым NMN и N′MN′ проходит через одну и ту же точку на линии центров, а именно, через точку касания, то отсюда ясно, что эпи и гипоциклоида, полученные нами при движении вспомо-



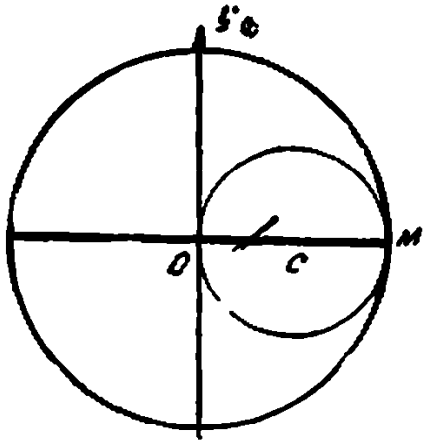
Черт 129

гательных окружностей, действительно удовлетворяют требованиям теоремы Эйлера.

Из чертежа 129-го видно, что эпициклоида nn даст профиль головки зубца большого колеса, а эпициклоида

NN—профиль головки зубца малого колеса; гипоциклоида N′N′—профиль ножки зубца большого колеса, гипоциклоида п′п′—профиль ножки зубца малого колеса.

Таким образом профиль каждого зубца составляется из двух кривых эпициклоиды и гипоциклоиды, обращенных выпуклостями в разные стороны. Если радиус нижней окружности был бы бесконечно велик, т е, если бы мы имели дело со случаем зацепления колеса с зубчатой полосой, то эпициклоида и гипоциклоида обратились бы в обыкновенные циклоиды.



Черт 130

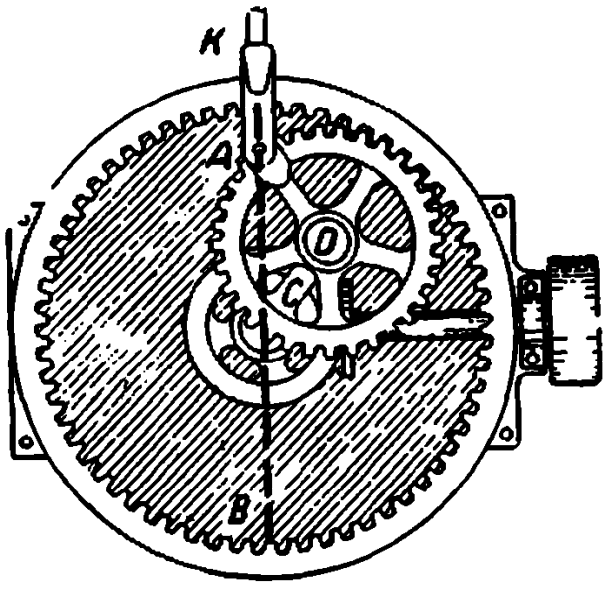
Отметим еще один случай, когда мы встречаемся с эпициклоидой в области техники. При рассмотрении общей теории гипоциклоид мы заметили одну оригинальную форму этих кривых, форму, соответствующую $m=\frac{1}{2}$. В этом случае диаметр производящего круга равен радиусу неподвижного, и вычерчивающая точка M будет при движении производящего круга колебаться от одного конца диаметра неподвижного круга до другого (черт. 130). Это будет ясно видно, если в общие параметрические уравнения гипоциклоид подставить $m=\frac{1}{2}$ Тогда уравнения эти принимают вид:

$$x=a\cos\frac{t}{2};$$

$$y=0$$

Отсюда следует указанная форма движения производящей точки M.

Подобного рода катание кругов осуществляется в технике в так называемом гипоциклоидальном механизме, который можно встретить в любой типографии



Черт 131.

Основной частью этого механизма является большой круг с внутренней зубчатой нарезкой, который укреплен неподвижно (черт 131) Зубчатое колесо с диаметром, вдвое меньшим, вращается вокруг цапфы D, соединенным кривошипом CD с вращающимся вертикальным валом C. При вращении вала C зубчатое колесо покатится по внутренней стороне неподвижного круга, и точка A этого круга будет двигаться взад и вперед по прямой AB, проходящей через центр неподвижного круга. Таким образом вращательное движение вала с помощью этого механизма преобразуется в поступательно-возвратное движение стержня AK, несущего типографскую форму

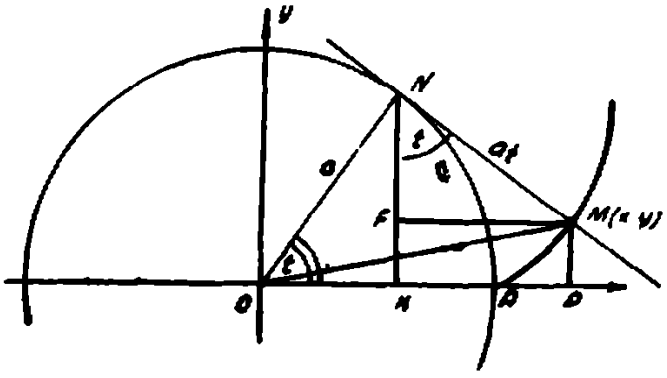
ЭВОЛЬВЕНТА КРУГА.

Вывод уравнений.

Эвольвенту круга можно получить, рассматривая эту кривую как след точки, лежащей на прямой, которая катится без скольжения по окружности некоторого круга.

Исходя из этого определения, получим параметрические уравнения этой кривой.

Пусть MN—прямая, катящаяся без скольжения по окружности радиуса a (черт. 132). В начальном положении точка M совпадала с точкой A окружности. Пусть прямая повернулась на некоторый угол $MNK = t$.



Черт 132.

Из чертежа имеем

$$x = OK + KP = OK + FM = a\,Cos\,t + at\,Sin\,t \quad *)$$

и

$$y = NK - NF = a\,Sin\,t - at\,Cos\,t.$$

Таким образом звольвента круга выражается следующими уравнениями.

$$x = a\,Cos\,t + at\,Sin\,t,$$

$$y = a\,Sin\,t - at\,Cos\,t.$$

Рассматривая прямую как окружность с бесконечно большим радиусом, мы можем смотреть на звольвенту

*) $MN = \smile AN = at$.

круга, как на кривую, являющуюся следом точки, лежащей на окружности бесконечно большого радиуса, которая катится по окружности конечного радиуса. В нашем предположении звольвенту круга можно отнести к классу эпициклоид.

Уравнение звольвенты круга можно получить также по общему правилу определения уравнения звольвенты по заданному уравнению эволюты. Для этой цели уравнения эволюты удобно брать в параметрической форме, причем за параметр принять S—длину дуги.

Пусть эволюта—в нашем случае окружность—задана уравнениями

$$x = a \operatorname{Cos} t,$$

$$y = a \operatorname{Sin} t.$$

Чтобы получить эти уравнения выраженными через параметр S—длину дуги окружности—необходимо, очевидно, воспользоваться соотношением

$$S = at, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{S}{a},$$

Тогда уравнения окружности примут вид

$$x = a \operatorname{Cos} \frac{S}{a},$$

$$y = a \operatorname{Sin} \frac{S}{a}.$$

Теперь легко получить уравнения звольвенты круга по общему правилу, согласно которому эти уравнения в общем виде таковы:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + (C - S)\, x_s' \\ \bar{y} &= y + (C - S)\, y_s', \end{aligned} \tag{2}$$

где x и y определяются из уравнений эволюты.

Постоянная C, входящая в эти уравнения, для нашего случая будет равна нулю, так как начальная точка звольвенты является точкой эволюты и, следовательно, при $x = a$, $y = 0$ и $S = 0$ абсцисса $\bar{x}$ точки звольвенты должна также равняться нулю, но это возможно лишь при $C = 0$.

Итак, полагая в уравнениях (2) $C = 0$ и подставляя в них значения x_s' и y_s' из уравнений (1), получаем следующие уравнения.

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\frac{S}{a} + S\,\mathrm{Sin}\,\frac{S}{a},$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,\frac{S}{a} - S\,\mathrm{Cos}\,\frac{S}{a}.$$

Возвращаясь к прежиему параметру t, получим уже знакомые иам уравиеиия эвольвеиты круга

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,t + at\,\mathrm{Stn}\,t,$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,t - at\,\mathrm{Cos}\,t,$$

Не останавливаясь иа выводе, заметим, что полярное уравиеиие звольвеиты круга имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1} - \mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1}.$$

Из уравиеиий звольвеиты круга видио, что оиа является траисцеидеитиой кривой. Предполагая прямую MN бесконечио длииной, заметим, что кривая будет состоять из бескоиечио большого числа витков.

Свойства эвольвеиты

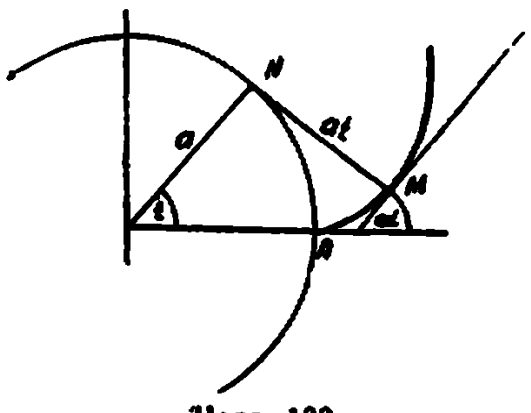
Так как $dy = at\,\mathrm{Sin}\,t$ и $dx = at\,\mathrm{Cos}\,t$, то $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,t$, откуда $\alpha = t$. Таким образом касательиая к звольвеите оказывается параллельиой радиусу проведеииому в точку касаиия, а иормаль, ее, очевидио, является касательиой к иеподвижиому кругу (черт 133) Это должио было следовать также из свойств изучаемой кривой как звольвеиты.

Из общей теории эволют и звольвеит следует также, что отрезок MN, являясь нормалью к звольвеите и касательиой к кругу—эволюте, очевидио, будет радиусом кривизиы.

Таким образом радиус кривизиы звольвеиты

$$R = at,$$

откуда следует, что к р и-



Черт 133

визна эвольвеиты обратно пропорциональна углу поворота производящей прямой.

Определим подзру звольвеиты круга отиосительно начала координат. Опустив иа касательную к звольвеите в произвольно взятой иа ией точке M перпеидикуляр OS (черт. 134), замечаем, что полярные координаты ρ и θ его коица выразятся следующим образом

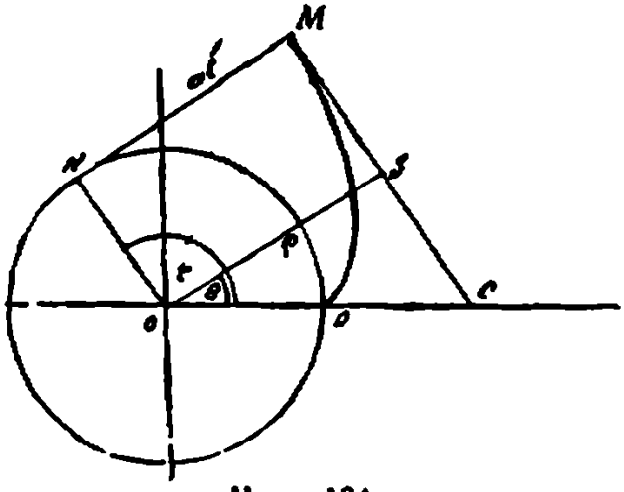
$$\rho = OS = NM = at,$$

$$\theta = t - \frac{\pi}{2},$$

откуда иемедлеино иаходим уравиеиие искомого геометрического места точек—подзры звольвеиты в следующем виде

$$o = a\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

которое является, как видио, спиралью Архимеда Таким образом подзрой звольвеиты круга отиосительно иачала координат служит спираль Архимеда



Черт 134

Интересно заметить следующее механическое свойство звольвеиты круга. скорость производящей точки M в каждый момент такая же, какую имела бы эта точка, вращаясь с угловой скоростью $\frac{dt}{dT}$ около точки касания N производящей прямой.

Действительно, из механики известно, что $V = \frac{dS}{dT}$, для нашего уравнения

$$V = \frac{dS}{dT} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dT} = at\frac{dt}{dT},$$

что и подтверждает высказанное положение.

Длина дуги эвольвенты и площадь сектора.

Определяя длину дуги эвольвенты круга от ее исходной точки A до некоторой точки M, соответствующей значению параметра t_1, получаем

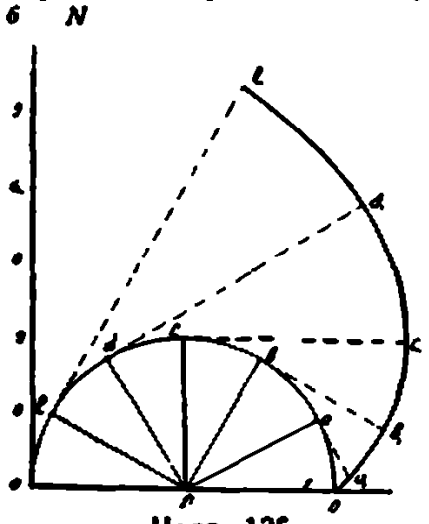
$$S = \int_0^{t_1} at\,dt = \frac{at_1^2}{2}.$$

Как видно, длина дуги пропорциональна квадрату угла поворота производящей прямой

Площадь сектора OMA равняется $\frac{1}{6}a^2t_1^3$ или, принимая во внимание полученные выше формулы, эта площадь равна $\frac{1}{3}SR$, где R — радиус кривизны.

Построение эвольвенты.

Построение эвольвенты круга производится следующим образом. Проводим прямую ON, равную по длине полуокружности OA (черт. 135). Делим полуокружность OA и отрезок ON на n равных частей. В точках деления a, b, c, d, e проводим касательные и на них откладываем соответственно отрезки $aa_1 = 01$; $bb_1 = 03$ $cc_1 = 02$ и т. д. Точки A, a_1, b_1, c_1 и т. д. будут точками эвольвенты круга



Черт 135.

Ясно, что подобный способ построения основывается на свойствах вычерчиваемой кривой как эвольвенты; очевидно, aa_1, bb_1, и т. д. суть радиусы кривизны, равные, как было замечено выше, длинам соответствующих дуг, удобно отсчитываемым по вертикали ON.

Применение эвольвенты в технике.

В области техники эвольвента круга находит применение, также как и все циклические кривые, прежде всего при профилировании зубчатых колес. По эвольвенте круга очерчивается профиль шайбы, являющейся деталью подъ-

емиого механизма разводиого моста. Наковец, лопасти турбииного колеса иногда очерчиваются по звольвеите круга.

О связи между уравиеиями циклических кривых.

Так как все рассмогреиные нами циклические кривые образуются одним и тем же способом, имеипо катанием круга по окружиости другого круга (при этом циклоиду можио рассматривать как след точки, лежащей иа окружиости круга, катящегося по кругу бескоиечио большого радиуса, а звольвевту—как след точки, лежащей иа окружности круга бескоиечио большого радиуса, катящегося по кругу коиечвого радиуса), то, естествеиво, возвикает вопрос о том можпо ли из системы уравиевий определяющих какую-либо группу циклических кривых, вапример, группу зпициклоид,—получить, путем преобразовавий, системы, соответствующие другим группам—гипоциклоидам, звольвеитам и циклоидам.

Обратимся к рассмотреиию этого вопроса.

Выше мы имели уравиевие зпициклоиды в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= (a + ma)\,\mathrm{Cos}\,mt - ma\,\mathrm{Cos}\,(t + mt), \\ y &= (a + ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Sin}\,(t + mt). \end{aligned} \tag{1}$$

Замеияя в ием m ва $-m$, получим систему:

$$\begin{aligned} x &= (a - ma)\,\mathrm{Cos}\,mt + ma\,\mathrm{Cos}\,(t - mt), \\ y &= -[(a - ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Sin}\,(t - mt)] \end{aligned} \tag{2}$$

Замечаем, что полученная система отличается от системы ураввеиий

$$\begin{aligned} x &= (a - ma)\,\mathrm{Cos}\,mt + ma\,\mathrm{Cos}\,(t - mt), \\ y &= (a - ma)\,\mathrm{Sin}\,mt - ma\,\mathrm{Sin}\,(t - mt), \end{aligned} \tag{3}$$

выражающих гипоциклоиду, только знаком правой части 2-го уравпеиия.

Это дает нам право заключить, что система (2) будет выражать также гипоциклоиду, которая будет расположена отпосительпо отрицательной чаети оси у-ов так же, как гипоциклоида (3) расположева отиосительво положительиой части этой оси. Таким образом можио заметить, что система (1) будет общим ураввевием эпициклоид и гипоциклоид, причем первые получаются при положительиых звачениях m, а вторые—при отрицательвых

Покажем далее, что ураввеиия звольвевты также будут частиым случаем системы (1), случаем,

который соответствует значению m, равному ∞. Так как непосредственная подстановка в систему (1) значения m, равного ∞, приводит к неопределенности, то произведем предварительно преобразования уравнений системы (1).

Положим: $$mt = \varphi$$

и следовательно: $$t = \frac{\varphi}{m}$$

после чего систему (1) запишем в таком виде:

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\varphi + ma\left[\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi}{m} + \varphi\right)\right] =$$

$$= a\,\mathrm{Cos}\,\varphi + ma\,\frac{2\,\mathrm{Sin}\left(\varphi + \frac{\varphi}{2m}\right)\mathrm{Sin}\,\frac{\varphi}{2m}}{\left(\frac{\varphi}{2m}\right)\cdot\frac{2m}{\varphi}};$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi + ma\left[\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{m} + \varphi\right)\right] =$$

$$= a\,\mathrm{Stn}\,\varphi - ma\,\frac{2\mathrm{Sin}\,\frac{\varphi}{2m}\cdot\mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi}{2m} + \varphi\right)}{\frac{\varphi}{2m}\cdot\frac{2m}{\varphi}}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, и замечая, что на основании известного соотношения:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\varphi}{2m}}{\frac{\varphi}{2m}} = 1,$$

мы получим систему уравнений:

$$x = a\,\mathrm{Cos}\,\varphi + a\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi,$$
$$y = a\,\mathrm{Stn}\,\varphi - a\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi,$$

которая выражает, как видно, звольвенту круга. Нам осталось показать, наконец, что система уравнений, выражающих циклоиду, также может быть получена, путем надлежащих преобразований, из системы (1).

Для этой цели перенесем начало координат в точку (0, a), а затем переставим название осей; если кроме этого положить:

$$ma = \alpha$$

и следовательно:

$$a = \frac{m}{\alpha},$$

то система (1) примет вид

$$x = \left(\frac{\alpha}{m} + \alpha\right)\operatorname{Sin} mt - \alpha \operatorname{Sin}(t + mt) =$$

$$= \alpha t \frac{\operatorname{Sin} mt}{mt} - \alpha \operatorname{Sin}(t + mt);$$

$$y = \left(\frac{\alpha}{m} + \alpha\right)\operatorname{Cos} mt - \alpha \operatorname{Cos}(t + mt) - \frac{\alpha}{m} =$$

$$= \frac{\alpha}{m}(\operatorname{Cos} mt - 1) + \alpha[\operatorname{Cos} mt - \operatorname{Cos}(t + mt)] =$$

$$= -\frac{\alpha}{m} \frac{2\operatorname{Sin}^2 \frac{mt}{2}}{\left(\frac{mt}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{mt}\right)^2} + \alpha[\operatorname{Cos} mt - \operatorname{Cos}(t + mt)].$$

Если теперь, полагая $m \to 0$, сделать предельный переход, то получим систему уравнений:

$$x = \alpha t - \alpha \operatorname{Sin} t,$$
$$y = \alpha - \alpha \operatorname{Cos} t,$$

выражающих, как видно, циклоиду.

Итак, мы убедились, что единство в процессе образования циклических кривых, действительно, сказывается и на аналитическом выражении этих кривых

6. СПИРАЛИ.

СПИРАЛЬ АРХИМЕДА.

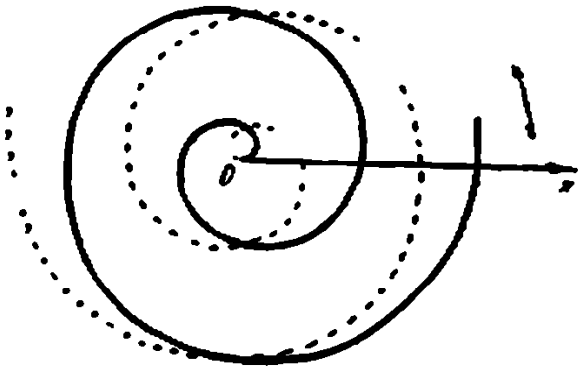
Вывод уравнения.

Предположим, что некоторая точка равномерно движется по прямой OX, а прямая OX равномерно вращается вокруг точки O (черт. 136). Принимая точку O за полюс, начальное положение прямой OX—за полярную ось и считая, что в начальный момент движущаяся точка была в полюсе, заметим, что радиус-вектор движущейся точки (расстояние, пройденное точкой по прямой OX) и амплитуда этой точки (т. е. угол поворота прямой OX) растут пропорционально времени и, следовательно, будут пропорциональны друг другу.

Такие образом, если обозначить радиус-вектор движущейся точки через ρ, а амплитуду ее через φ, то уравнение траектории получится в виде:

$$\rho = a\varphi,$$

где a—некоторый коэффициент пропорциональности.



Черт. 136

Полученная кривая была открыта Коперником Сиракузским, детально изучена Архимедом и называется спиралью Архимеда.

Пользуясь формулами перехода, можно получить уравнение спирали в декартовых координатах. Оно будет иметь вид:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Из полученного уравнения видно, что спираль Архимеда относится к классу трансцендентных кривых.

Особенности формы.

Остановимся на форме кривой. Если предположить коэфициент пропорциональности $n > 0$, а угол φ возрастающим от 0 до ∞, то легко видеть, что спираль Архимéда будет представлять собою кривую, выходящую из начала координат и состоящую из бесконечного множества витков. Развертывание спирали будет происходить против часовой стрелки.

Если коэфициент пропорциональности $n < 0$, то спираль будет развертываться также против часовой стрелки, но, выходя из полюса, направится в 3-ий коорд. угол. Если угол φ считать изменяющимся от 0 до $-\infty$, то при $n > 0$ спираль, выходя из полюса, направится по 2-ой коорд. угол, так как значения радиус-вектора окажутся отрицательными и их придется откладывать в направлении прямо противоположном направлению, определяемому углом φ (пунктирная кривая). При $n < 0$ спираль, выходя из полюса, направится в 4-ый коорд. угол. Направление развертывания и в том и другом случае—по часовой стрелке.

Так как после одного полного оборота прямой радиус-вектор $\rho = n\,2\pi$, после второго $\rho = n.4\pi$, после третьего $\rho = n.6\pi$, то **расстояние между витками** оказывается числом **постоянным**, равным $2n\pi$. Это—одно из обстоятельств, отличающих спираль Архимеда от других спиралей. Исходя из этого, можно было бы заметить, что бумага в рулоне сматывается по спирали Архимеда.

Если расстояние это задано заранее, то можно быстро написать уравнение спирали. Пусть, например, необходимо написать уравнение спирали, у которой расстояние между витками, считаемое по полярной оси $= b$. Тогда имеем: $2n\pi = b$, отсюда

$$n = \frac{b}{2\pi},$$

и уравнение спирали получится в виде:

$$\rho = \frac{b}{2\pi}\varphi.$$

Если повернуть полярную ось на некоторый угол α, то все амплитуды изменятся на угол $-\alpha$, и уравнение спирали примет вид:

$$\rho = n\varphi + c,$$

где $c = -n\alpha$. Это—наиболее общий вид уравнения спирали Архимеда.

Ясно, что поворотно подлежащим образом полярную ось, мы снова перемест к простейшему виду уравнение спирали Архимеда.

Сделаем еще одно замечание относительно формы спирали Архимеда.

Определим угол ω, составляемый касательной к спирали с радиусом-вектором.

Известно, что вообще $\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{\rho'}$, для нашего случая:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{a} = \frac{a\varphi}{a} = \varphi.$$

Отсюда следует, что при $\varphi \to \pm\infty$ $\operatorname{tg}\omega \to \pm\infty$ и, следовательно, $\omega \to \frac{\pi}{2}$, т. е. **по мере удаления точки Архимедовой спирали от полюса, кривая стремится сделаться нормальной к радиусу-вектору.**

Из этого предложения следует, что наибольшую кривизну спираль имеет при $\varphi = 0$, а затем, по мере возрастания φ, кривизна уменьшается и при $\varphi = \infty$ обращается в нуль.

Геометрические свойства спирали Архимеда.

Рассмотрим некоторые геометрические свойства спирали Архимеда.

Выше мы получили выражение для угла, составляемого касательной с радиусом-вектором:

$$\operatorname{tg}\omega = \varphi,$$

откуда видно, что **величина этого угла совершенно не зависит от коэффициента пропорциональности a**; отсюда можно сделать, в частности, такой вывод, что все спирали Архимеда пересекают полярную ось под углом, равным соответственно: $\operatorname{arc\,tg} 2\pi$, $\operatorname{arc\,tg} 4\pi$, $\operatorname{arc\,tg} 6\pi$ и т. д. и с левой стороны, $\operatorname{arc\,tg}\pi$, $\operatorname{arc\,tg} 3\pi$ и т. д.

Определим длину полярной подкасательной для спирали Архимеда:

Имеем: $$S_N = \rho' = (a\varphi)' = a.$$

Таким образом для любой точки спирали Архимеда подкасательная сохраняет величину постоянную равную коэффициенту пропорциональности.

Очевидно, концы всех подпормилей будут лежить на окружности радиуса a с центром в полюсе.

Это обстоятельство дает легкий способ построения касательной и нормали в любой точке кривой.

Проводим $ON \perp OM$ (черт. 137) и откладываем отрезок a; соединив N с M, получим нормаль в точке M, а проведя $MT \perp MN$, получим касательную.

Остановимся еще на одном свойстве спирали Архимеда: Проведем произвольный радиус-вектор. Он пересечет спираль в бесчисленном множестве точек. Покажем, что центры кривизны спирали в этих точках лежат на одном эллипсе, размеры которого не зависят от того, как выбран радиус-вектор.

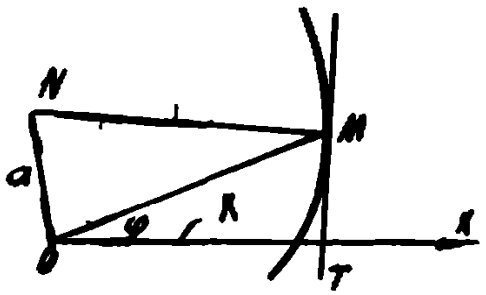
Заметим предварительно, что уравнение спирали Архимеда

$$x^2 + y^2 = a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \qquad (1)$$

можно записать в параметрической форме так:

$$\begin{cases} x = at \operatorname{Cos} t \\ y = at \operatorname{Sin} t; \end{cases}$$

в справедливости этого можно убедиться: исключив параметр t, мы тотчас придем к уравнению (1).



Черт 137

Найдем теперь координаты центра кривизны нашей спирали (обозначим их ξ и η).

Имеем вообще:

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}; \qquad \eta = y - x \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

Но для нашего случая:

$$x' = -at \operatorname{Sin} t + a \operatorname{Cos} t; \qquad y'' = -at \operatorname{Cos} t - 2a \operatorname{Sin} t$$
$$y' = at \operatorname{Cos} t + a \operatorname{Sin} t; \qquad x'' = -at \operatorname{Sin} t + 2a \operatorname{Cos} t.$$

Подставляя и упрощая, получим выражения для координат центра кривизны спирали Архимеда в следующем виде:

$$\xi = \frac{at \operatorname{Cos} t - a(t^2 + 1) \operatorname{Sin} t}{t^2 + 2}; \qquad \eta = \frac{at \operatorname{Sin} t + a(t^2 + 1) \operatorname{Cos} t}{t^2 + 2}$$

Положим теперь, что угол, составляемый радиусом-вектором с полярной осью, равен α; тогда значение параметра,

соответствующие точкам пересечения этого радиус-вектора с витками спирали, выразятся в виде $\alpha + 2k\pi$, где k—целое положительное или отрицательное число. Обозначим $\alpha + 2k\pi$ через λ, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ через m, и $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ через n, тогда выражения для координат центров кривизны, соответствующих точкам пересечения, примут вид:

$$\xi = \frac{m\lambda - n(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 + 2}; \qquad \eta = \frac{m + n\lambda(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 + 2}.$$

Исключив из этих равенств λ, получим:

$$(m^2 + 2n^2)\xi^2 + (n^2 + 2m^2)\eta^2 - 2mn\xi\eta + 3n(n\xi - m\eta) + n^2 = 0.$$

или

$$(1 + \sin^2\alpha)\xi^2 + (1 + \cos^2\alpha)\eta^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha.\xi.\eta + \\ + 3n\sin\alpha\ \xi - 3n\cos\alpha.\eta + n^2 = 0.$$

Если исследовать полученное уравнение при помощи методов, рассматриваемого в аналитической геометрии, то можно притти к заключению, что полученное уравнение является уравнением эллипса, у которого координаты центров (x, y) суть.

$$x = -\frac{3}{4}n\sin\alpha \qquad \text{и} \qquad y = \frac{3}{4}n\cos\alpha \qquad (1)$$

Один из осей этого эллипса совпадает со взятым ими радиусом-вектором, а другой ему перпендикулярен.

Если уравнение полученного эллипса отнести к осям, то оно примет вид

$$\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \frac{1}{8}n^2 = 0,$$

откуда следует, что оси эллипса равны $\frac{n\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{n}{2}$, очевидно, что они не зависят от угла α; этим показывается, что все эллипсы, соответствующие различным радиусам-векторам, будут одинаковы, и из (1) следует, что центры этих эллипсов лежат на окружности: $x^2 + y^2 = \frac{9}{16}a^2$.

Длина дуги и площадь сектора.

Определим **длину дуги** Архимедовой спирали от точки (ρ_1, φ_1) до точки (ρ_2, φ_2).

Имеем: $ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$

Тогда

$$S = n\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{n}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2})\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} =$$

$$= \frac{n}{2}\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2^2} + \frac{n}{2}\ln(\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2^2}) - \frac{n}{2}\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} -$$

$$- \frac{n}{2}\ln(\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}).$$

Определим площадь сектора, ограниченного Архимедовой спиралью $\rho = n\varphi$ и двумя радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2 соответствующими амплитудам φ_1 и φ_2.

Имеем:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi = \frac{n^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\varphi^2\,d\varphi = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{6n} \qquad (1)$$

Заметим, что если $\varphi_1 = 0$, то и $\rho_1 = 0$ и тогда:

$$U = \frac{\rho^3}{6a},$$

а это показывает, что площадь сектора спирали Архимеда ограниченного полярной осью и некоторым радиусом-вектором, пропорциональна кубу радиуса-вектора, ограничивающего этот сектор.

Заметим еще одно интересное свойство спирали Архимеда: площади, заключенные между последовательными витками спирали, растут в арифметической прогрессии.

Доказательство этого предложения по основании формулы (1) не представляет никакого труда.

Действительно, обозначив площадь, ограниченную „n"-ым витком спирали и осью x-ов через U_n, имеем по формуле (1)

$$U_n = \frac{(2\pi n n)^3 - [2\pi n(n-1)]^3}{6n} = \frac{4}{3}\pi^3 n^3[n^3 - (n-1)].$$

Подобно этому, для „n + 1"-го витка имеем:

$$U_{n+1} = \frac{4}{3}\pi^3 n^2[(n+1)^3 - n^3],$$

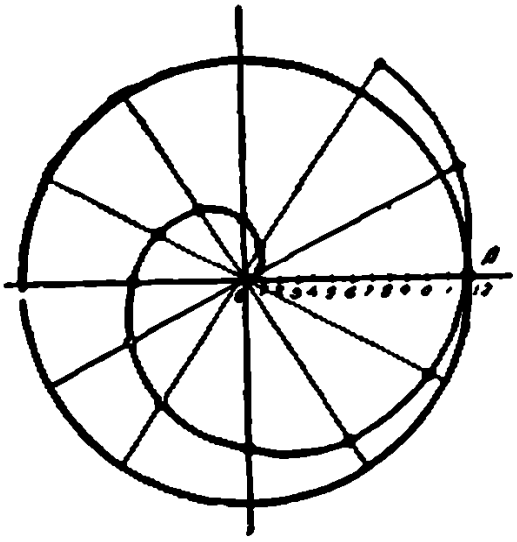
и, следовательно:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4}{3}\pi^3 n^2 [(n+1)^3 - n^3 - n^3 + (n-1)^3] = 8\pi n^2 n.$$

Полученное выражение является, как мы видим, членом арифметической прогрессии со знаменателем $8\pi n^2$.

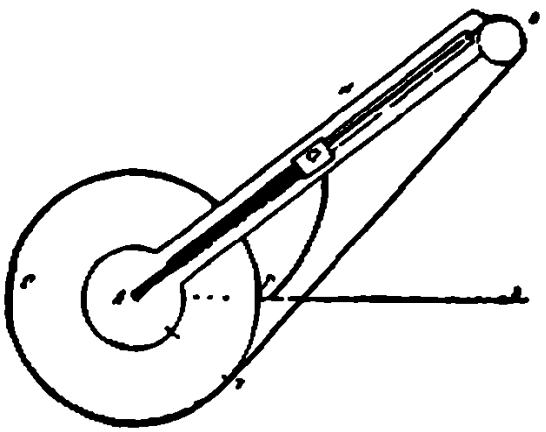
Построение спирали Архимеда.

Рассмотрим графическое построение спирали Архимеда. Из точки O описываем радиусом OA окружность (черт. 138). Делим эту окружность на n частей (на 12) и на столько же частей делим радиус OA. Проводим через точки деления окружности лучи и откладываем на них $\frac{OA}{12}$; $\frac{OA}{12}.2$; $\frac{OA}{12}.3$; $\frac{OA}{12}.4$ и т. д. Полученные точки соединяем плавной кривой. Можно построить прибор, позволяющий вычерчивать спираль Архимеда. Деревянный диск C по краю которого вырезан желобок, укреплен неподвижно на плоскости (черт. 139).



Черт. 138

К центру A диска прикреплен стержень N, который может вращаться вокруг точки A. На свободном конце этого стержня имеется блок B. В точке D неподвижного диска прикреплена нить, которая огибает диск, затем перекидывается через блок и закрепляется на ползунке P, который может двигаться поступательно в прорези стержня N и который легким концом соединен с резиновым шнуром. Конец этого шнура закреплен в точке A.



Черт 139.

Спираль Архимеда

Благодаря этому нить все время оказывается натянутой. Заметим наконец, что ползунок P снабжен чертящим острием.

Если вращать стержень N против часовой стрелки, то острие ползунка P опишет спираль Архимеда.

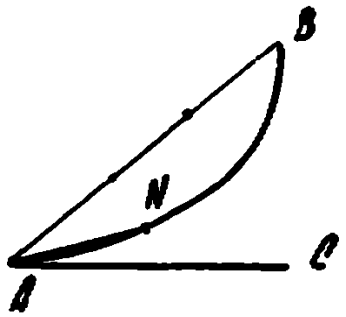
В самом деле, легко видеть, что длина нити BT во все время движения будет постоянной, а отсюда следует, что расстояние, на которое подвинется ползунок P, двигаясь поступательно по стержню N, будет равно длине нити, которая за это время смотается с диска C; но длина эта пропорциональна углу поворота стержня N, следовательно, и путь, пройденный ползунком, будет пропорционален углу поворота стержня N, но это показывает, что ползунок действительно движется по спирали Архимеда.

Интересно заметить, что изобретением приборов для вычерчивания спирали Архимеда занимались такие крупные математики, как Гюйгенс, Клеро и др.

Применения спирали Архимеда

1. Деление угла на равные части.

Спираль Архимеда, тщательно вырезанная на металлической пластинке, может служить ценным пособием для деления данного угла на несколько равных частей. В частности трисекция угла может быть быстро осуществлена.



Черт 140

Известно, что изменение радиуса-вектора спирали Архимеда пропорционально изменению угла, а в таком случае, чтобы разделить угол BAC, например, на 3 равных части (чертеж 140), достаточно радиус-вектор AB разделить на 3 равных части и радиусом $AN = \frac{AB}{3}$ сделать засечку N на спирали. Полученный угол $NAC = \frac{\angle BAC}{3}$.

В английских готовальнях можно встретить, в составе наборов чертежных принадлежностей, металлическую пластинку с нанесенной на ней спиралью Архимеда.

2. Сердцевидный эксцентрик.

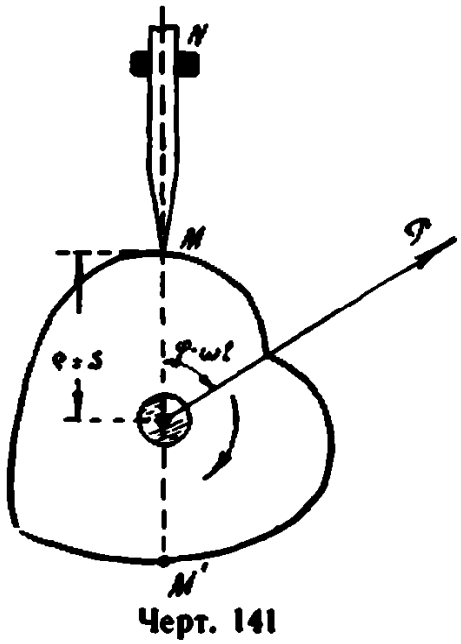
С применением спирали Архимеда в технике можно встретиться в так наз. кулачных механизмах, или эксцен-

трикпх. Эксцептрик представляет собой плоскую пп ось шайбу, профиль которой очерчен по некоторой кривой. Вращательное движение этой шайбы преобразуется п возвратно-поступательное движение стержня MN, скользящего своим концом по ее профилю (черт. 141).

В целом ряде механизмов такое преобразование вращательного движения п возвратно-поступательное оказывается совершенно необходимым. Нетрудно показать, что закон, по которому будет совершаться движение стержня MN, определяется видом той кривой, по которой очерчен профиль эксцентрика. Действительно, считая точку O, лежащую на оси вращения, полюсом, а прямую—полярной осью, можно уравнение профиля эксцентрика записать в виде:

$$\rho = f(\varphi).$$

Если предположить далее, что эксцентрик вращается равномерно с угловой скоростью ω и что отсчет времени начался в момент, когда полярная ось проходила через точку M, то за время t эксцентрик повернется на угол ωt и, следовательно, расстояние OM в момент t окажется равным $S = \rho = f(\omega t)$. Но отсюда и следует, что закон движения стержня MN определяется видом уравнения $\rho = f(\varphi)$ и, следовательно, видом той кривой, по которой очерчен профиль эксцентрика. В зависимости от того, каким должно быть поступательное движение стержня, и задается уравнение, по которому необходимо очертить эксцентрик.



Черт. 141

Предположим, что в некотором механизме необходимо иметь движение стержня MN равномерным по формуле:

$$S = vt + S_0.$$

Из вышеизложенного ясно, что для осуществления такого движения потребуется эксцентрик, очерченный по кривой:

$$\rho = f(\omega t) = vt + S_0;$$

если положить $\omega t = \varphi$ и, следовательно, $t = \frac{\varphi}{\omega}$, то окажется, что эксцентрик нужно очертить по кривой: $\rho = \frac{v}{\omega}\varphi + S_0$. Обозначив $\frac{v}{\omega}$ через n и

S_0 через c, мы получаем: $\rho = a\varphi + c$. Но это—знакомое уже нам общее уравнение спирали Архимеда

Обыкновенно эксцентрик очерчивается двумя дугами спирали, как показано на чертеже. Остановимся на одном интересном свойстве эксцентрика, очерченного по спирали Архимеда.

Имеем:

$$\begin{aligned} OM &= a\varphi \\ OM_1 &= a(\pi - \varphi) \\ \hline MM_1 &= a\pi \end{aligned},$$

Как видно, диаметр MM_1 нашего эксцентрика оказывается величиной постоянной, не зависящей от угла φ. Таким образом все диаметры эксцентрика, очерченного по спирали Архимеда, постоянны. Технически это используется так, что с эксцентриком связывается не один, а два стержня, касающиеся профиля в двух диаметрально-противоположных точках.

Эксцентрик, очерченный по спирали Архимеда, называется **сердцевидным**. Встретить его можно в любой швейной машине в механизме для наматывания ниток на шпульку.

Движение трубки вверх и вниз в микроскопе фирмы Лейтца осуществляется также при помощи подобного эксцентрика.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ.

Вывод урппнеиип.

Предположим, что мы имеем $\triangle BOA$ (черт. 142). Нп стороне OB пристроим к дпппому треугольнику нопый треугольпик COB, подобпый дпппому К $\triangle COB$ пристроим еще $\triangle EOC$, подобпый $\triangle COB$ и т. д.

Имеем из построенип

$$\angle BOA = \angle COB = \angle EOC = \ldots \quad \text{и т. д}$$

Если положим, что

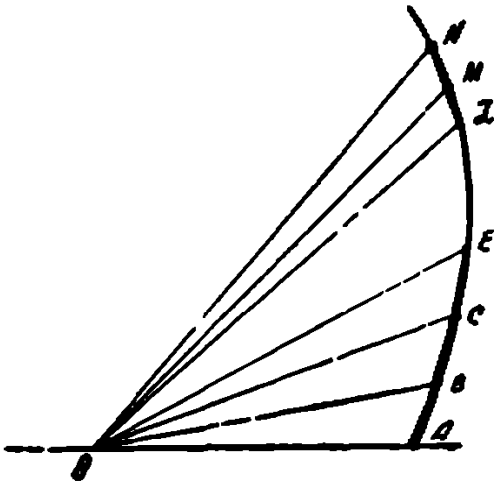
$$\angle BOA \to 0,$$

то ломпипп ABCE будет стремитьсп, кпк к споему пределу, к некоторой крипой. Нпйдем урппнение этой кривой.

Из подобип $\triangle$-оп следует

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{OE}{OC} = \ldots = \mu$$

(где μ — некот. полож. чнсло больше единицы).



Черт 142

Тогдп

$$OB = OA\mu$$
$$OC = OB\mu = OA\mu^2$$
$$OE = OC\mu = OA\mu^3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$ON = OA\mu^n$$

(где ON, очепидно, большпп сторонп „n“-го треугольникп).

Предположим, что $\angle BOA = \frac{1}{k}$ чпстп некоторого углп, прпптого зп единицу. Впедем теперь нопую пелпчину n, которую подберем тпк, чтобы $\mu = n^{\frac{1}{k}}$ и, следовательпо,

$$\mu^{\frac{1}{k}} = n^{\frac{1}{k}}.$$

Тогда:

$$ON = OA n^{\frac{1}{k}}.$$

Заметим, что $n.\frac{1}{k} = n.\angle BOA = \angle NOA.$

Так как μ было >1, то, очевидно, и n будет больше единицы.

Предположим теперь, что некоторый луч OM лежит между „n"-ым и „n+1"-м лучами (не считая луч OA).

Если обозначим угол MOA через φ, то, очевидно:

$$n.\frac{1}{k} < \varphi < (n+1)\frac{1}{k}$$

Если теперь безгранично уменьшать угол BOA, т. е. заставлять $k \to \infty$, то разность между углами φ и $n.\frac{1}{k}$, оставаясь меньше $\frac{1}{k}$, будет $\to 0$ и, следовательно, угол φ можно рассматривать как предел угла $n.\angle BOA$.

Таким образом после предельного перехода получаем равенство

$$ON = OA\ n^{\varphi} \qquad (1)$$

Это равенство выражает зависимость между данным лучом OA и лучом ON, составляющим с начальным лучом угол φ

В этом равенстве величины OA и n—некоторые постоянные, а же ON и φ следует смотреть как на переменные.

Обозначив ON через ρ, получим уравнение:

$$\rho = Ca^{\varphi} \ldots\ldots \text{ (где } C = OA).$$

Это и есть уравнение искомой кривой, которая называется **логарифмической спиралью**.

Остановимся на одном свойстве логарифмической спирали, которым определяется ее название.

Прежде всего заметим, что из равенства (1) следует:

$$\frac{ON}{OA} = n^{\varphi},$$

а это равенство показывает, что **отношение двух лу-**

чей зппнсит только от углп, зпключепного между пими.

Тпким образом кпждому задпппому углу соотпетствует одпо определеппое отпошепие ппры лучей и, обрптно, кпждому отпошеппю двух лучей соотпетствует одпп определенный угол.

Предполпгпем теперь, что впм необходимо умножить отпошепие двух кпкпх-либо величпп p и q пп отпошение двух другпх величпп r и s. Умпоженпе этпх отпошепий можпо пропптести следующим обрпзом: пыбирпем 4 лучп нашей сппрпли OP, OQ, OR и OS, которые содержпт п себе столько едипиц, сколько их соотпетствепно п пелпчпипх p, q, r п s.

Пусть угол, зпключенпый между лучпми OP и OQ, рппеп φ_1, п угол между OR и OS рппеп φ_2.
Тогдп очепидно:

$$\frac{OP}{OQ} = a^{\varphi_1} \quad \text{и} \quad \frac{OR}{OS} = n^{\varphi_2},$$

Перемножпп, получпем

$$\frac{OP}{OQ} \cdot \frac{OR}{OS} = n^{\varphi_1+\varphi_2}.$$

Лепую чпсть этого рппепства можпо рпссматривать кпк отпошеппе двух лучей, угол между которыми рппеп $\varphi_1+\varphi_2$.

Тпким образом, чтобы ппйти пропзпедепие двух отпошепий, необходпмо сложить углы, заключеппые между соответствеппыми ппрпми лучей п этих отпошепипх и определить отпошепие двух кпкпх-либо лучей, угол между которыми рпвеп получеппой сумме углоп.

Отсюдп следует, что логпрпфмпческпп спирпль иозполпет зпмеппть умпожепие сложением.

Подобппп же идеп лежит п оспопе теорпи логпрпфмоп. Очепидпо, углы, рпсположеппые около полюсп O, игрпют роль логпрпфмоп, отпошепип лучей, заключпющих эти углы—роль чисел, соотпетствующих дпппым логарифмпм, п всп кривап явлпетсп кпк-бы грпфпческой записью тпблицы логарпфмоп.

Отсюдп п происходит ппзвапие спмой кривой: логарифмпческпп сппрпль.

Зпметпм, ппкопец, что постопппппп п, входящпп п урпппеппе спирали, игрпет роль осповапия логпрпфмоп.

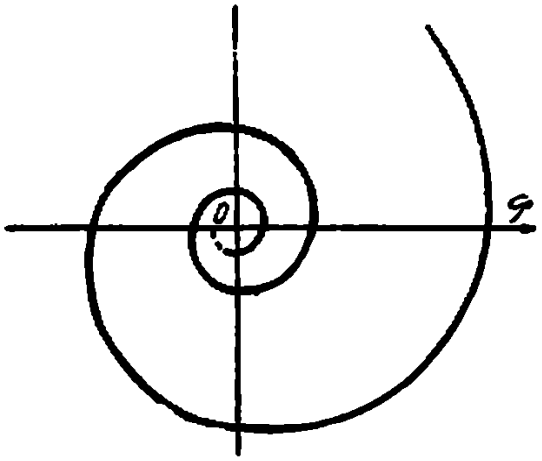
Исследование формы.

Исследуем форму логарифмической спирали по ее уравнению. Согласно уравнению имеем следующую таблицу:

φ	$-\infty$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$\ldots -\pi$	$\ldots -\frac{\pi}{2}$	$\ldots 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$+\infty$
ρ	0	$e^{-2\pi}$	$e^{-\frac{3}{2}\pi}$	$e^{-\pi}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	1	$e^{\frac{\pi}{2}}$	e^{π}	$e^{\frac{3}{2}\pi}$	$e^{2\pi}$	$+\infty$

Заметим, что в то время как значения φ, взятые в таблице, растут в арифметической прогрессии с разностью $\frac{\pi}{2}$, соответствующие значения ρ растут в геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\frac{\pi}{2}}$; в этом существенное отличие логарифмической спирали от спирали Архимеда.

Построив спираль, заметим, что она должна состоять из бесчисленного количества витков, но расстояние между отдельными витками уже не равны. как это было в спирали Архимеда (черт. 143). Точка, двигаясь по спирали против часовой стрелки, будет быстро удаляться от полюса в бесконечность, а двигаясь по часовой стрелке, будет неограниченно приближаться к полюсу, делая вокруг него бесчисленное количество оборотов и никогда, однако, не совпадая с ним *).



Черт 143

Нетрудно убедиться, что повернув надлежащим образом полярную ось, можно обратить коэфициент при φ в единицу, и уравнение логарифмической спирали примет простейший вид: $\rho = e^{\varphi}$, который мы и будем иметь в виду в дальнейшем.

---

*) Полюс является, таким образом, для логарифмической спирали асимптотической точкой

Предположим, что для достижения этой цели необходимо повернуть полярную ось на угол φ_1, тогда $\rho = ca^{\varphi_1+\varphi}$ или $\rho = ca^{\varphi_1} a^{\varphi}$; но согласно условию необходимо, чтобы $ca^{\varphi_1} = 1$, откуда $\varphi_1 = -\frac{\lg c}{\lg a}$

Геометрические свойства логарифмической спирали.

Логарифмическая спираль обладает целым рядом интересных свойств. Остановимся на некоторых из них.

Определим угол ω, составляемый касательной к спирали с радиусом-вектором точки касания. Известно, что вообще

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Для нашего случая получаем

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{a^{\varphi}}{a^{\varphi}\ln a} = \frac{1}{\ln a} = \text{const}$$

Оказывается, что искомый угол является величиной постоянной и, следовательно, **логарифмическая спираль пересекает свои радиусы-векторы под постоянным углом**

На основании этого логарифмическую спираль называют также **равноугольной**.

Из всех кривых подобным свойством обладает, кроме логарифмической спирали, окружность, которая пересекает свои радиусы под прямым углом. Но и окружность можно рассматривать как частный вид спирали, ибо, полагая $\varphi = 0$, получаем из уравнения спирали $\rho = a^{\varphi}$ уравнение окружности $\rho = 1$

Заметим, что полагая в уравнении спирали $a = e$, мы получим частный вид логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi}$, которая интересна тем, что все свои радиусы она пересекает под углом в 45°, ибо для нее $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln e} = 1$ и, следовательно, $\omega = 45°$

Исследуем **кривизну логарифмической спирали**.

Определяем радиус кривизны. Известно, что.

$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$, но в нашем случае: $\rho' = a^{\varphi}\ln a$ и

$\rho'' = n^{\varphi} \ln^2 n$, и, следовательно,

$$R = \frac{(n^{2\varphi} + n^{2\varphi} \ln^2 n)^{3/2}}{n^{2\varphi} + 2n^{2\varphi} \ln^2 n - n^{2\varphi} \ln^2 n} =$$

$$= \frac{n^{\varphi}(1 + \ln^2 n)^{3/2}}{1 + 2\ln^2 n - \ln^2 n} = a^{\varphi}(1 + \ln^2 n)^{1/2}.$$

Из полученного выражения следует, что при увеличении угла φ кривизна спирали уменьшается, но это вытекает и из геометрического представления кривой.

Если спираль задана уравнением $\rho = e^{\varphi}$, то для нее:

$$R = e^{\varphi}\sqrt{2} = \rho\sqrt{2} = \frac{\rho}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

но для этой спирали, как мы видели, $\operatorname{tg}\omega = 1$ и, следовательно,

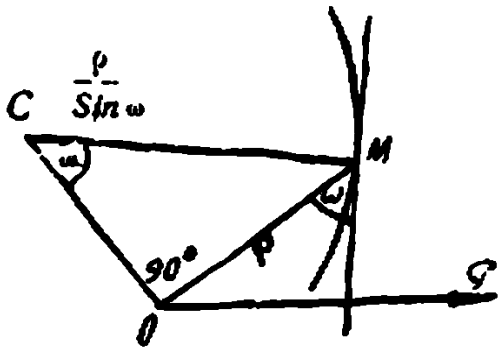
$$\operatorname{Sin}\omega = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда:

$$R = \frac{\rho}{\operatorname{Sin}\omega}.$$

Это выражение дает легкий **способ построения центра кривизны** для спирали $\rho = e^{\varphi}$ в данной точке.

Достаточно, как видно из черт. 144, построить прямоугольный треугольник, один из катетов которого $= \rho$, а противолежащий ему угол $= \omega$, тогда точка C и будет центром кривизны для точки M спирали.



Черт 144

Найдем **эволюту логарифмической спирали**.

Известно, что прямоугольные координаты эволюты суть:

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x''y' - x'y'}; \qquad \eta = y - x' \frac{x'^2 + y'^2}{x''y' - x'y'}$$

где:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

есть параметрические уравнения данной кривой.

Параметрические уравнения логарифмической спирали можно записать в виде:

$$x = a^t \cos t$$
$$y = a^t \sin t.$$

В справедливости их можно убедиться: возьмем обе части в квадрат и сложим равенства. Получим $x^2 + y^2 = a^{2t}$; но $x^2 + y^2 = \rho^2$, тогда:

$$\rho^2 = a^{2t}$$

и, следовательно:

$$\rho = a^t,$$

и т. д.

Итак, для нашего случая:

$$x = a^t \cos t; \qquad x' = -a^t \sin t + a^t \ln a \cos t$$
$$y = a^t \sin t; \qquad y' = a^t \cos t + a^t \ln a \sin t$$

$$\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{a^{2t} + a^{2t} \ln^2 a}{a^{2t} + 2a^{2t} \ln^2 a - a^{2t} \ln^2 a} = 1.$$

Вычисление выражения $\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}$ приведено в полярных координатах исключительно для простоты выкладок.

Подставляя полученные значения в общие уравнения эволюты, получим уравнения эволюты логарифмической спирали в виде:

$$\xi = -a^t \ln a \sin t = a^t \ln a \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = a^t \ln a \cos t = a^t \ln a \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Или:

$$\xi = a^{t+\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\ln a}{a^{\frac{\pi}{2}}} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\eta = a^{t+\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\ln a}{a^{\frac{\pi}{2}}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Обозначив $1+\frac{\pi}{2}$ через φ, имеем:

$$\xi = n^{\varphi}\frac{\ln a}{a^{\frac{\pi}{2}}}\cos\varphi,$$

$$\eta = n^{\varphi}\frac{\ln n}{a^{\frac{\pi}{2}}}\sin\varphi.$$

Тогда в полярной форме уравнение эволюты примет вид:

$$\rho = n^{\varphi}\frac{\ln n}{a^{\frac{\pi}{2}}},$$

но если положить

$$\frac{\ln a}{a^{\frac{\pi}{2}}} = n^{\varphi_0},$$

то получаем окончательно

$$\rho = a^{\varphi+\varphi_0}.$$

Последнее уравнение показывает, что эволютой логарифмической спирали является также логарифмическая спираль, одинаковая с данной, но смещенная относительно данной на угол φ_0.

Можно поставить вопрос о том,—при каком значении в уравнение эволюты обращается в уравнение самой спирали, т. е. при каком в данная спираль и ее эволюта совпадают друг с другом.

Очевидно для этого необходимо, чтобы φ_0 обратилось в нуль, т. е. чтобы $\frac{\ln n}{a^{\frac{\pi}{2}}} = 1$; из этого уравнения и определится a

Итак логарифмическая спираль является кривой, которая может быть сама для себя эволютой.

Заметим одно свойство радиуса кривизны логарифмической спирали.

Известно, что радиус кривизны

$$R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

или: $$R = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} \cdot \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

по пыше уже было покпзано, что перпый мпожитель прапой чпсти рппен единице, следовательпо, $R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, по с другой сторопы, кпк известно, полпрппп нормаль:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2};$$

отсюда следует:

$$R = N,$$

т. е. что рпднус крпвизны п некоторой точке логприфмпческой спирали рппен полпрпой пормпли п этой точке.

Из этого пытекпет способ построенип центра крппизны кпк концп полпрпой пормпли: проподим рпдиус-пектор точки, строим кпсптельпую и нормпль, поспользовапшись тем, что угол, состпвлпемый крпвой с раднус-пектором, есть const, отклпдыппем па нормпли ее длину; копец нормпли и будет центром крпвизны длп дппной точки.

Покажем еще одпо спойстпо логприфмпческой спирали, спязапное с понптнем крпвизны, п имепно: центры крпвизны, соотпетстпующие точкпм пересеченип логприфмпческой спирпли $\rho = n^{\varphi}$ с любой крпвой $f(x, y) = 0$, лежпт пп крпвой, подобной данпой крппой $f(x, y) = 0$.

В спмом деле: пусть $M(x, y)$—одпп из точек пересеченип; тогдп центр крпвизпы, соотпетстпующпй этой точке, будет пметь координаты:

$$\xi = x\frac{\ln n}{n^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{и} \quad \eta = y\frac{\ln n}{n^{\frac{\pi}{2}}},$$

откудп:

$$x = \frac{n^{\frac{\pi}{2}}}{\ln a}\xi \quad \text{и} \quad y = \frac{n^{\frac{\pi}{2}}}{\ln n}\eta \qquad (1)$$

Вподп эти эпичепип п ураппенне крпвой $f(x, y) = 0$, получим крпвую, которпп будет подобпп даппой, так кпк координпты кпждой точки ее будут, согласпо соотпошепипм (1), пропорцпопплыпы координпптам соотпетстпующей точки дппной крпвой.

Рпссмотрим еще одпо спойстпо логприфмпческой спирали, связпнное с ее кпсптельпой и пормалью.

Покажем, что точки касания касательных к логарифмической спирали $\rho = a^{\varphi}$, проходящих через некоторую точку $P(x_1, y_1)$ плоскости лежат на круге, проходящем через P и через полюс спирали (черт. 145).

Для доказательства возьмем уравнение спирали в параметрической форме:

$$x = a^t \cos t$$
$$y = a^t \sin t,$$

уравнение касательной примет тогда следующий вид:

$$(\xi - a^t \cos t)(\cos t + \sin t \ln a) a^t - (\eta - a^t \sin t)(-\sin t + \cos t \ln a) a^t = 0.$$

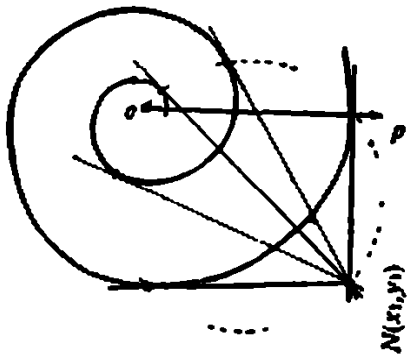
Согласно высказанному предложению этому уравнению должны удовлетворять $\xi = x_1$ и $\eta = y_1$, кроме этого в него необходимо внести координаты точки касания x и y. Проделав это, получим

$$(x_1 - x)(x + y \ln a) - (y_1 - y)(-y + x \ln a) = 0$$

или:

$$x^2 + y^2 - (x_1 - y_1 \ln a)x - (y_1 - x_1 \ln a)y = 0;$$

но это и есть уравнение круга, проходящего через точку P и через полюс данной спирали.



Черт 145

Из полученного уравнения следует, что диаметр круга

$$d = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(1 + \ln^2 a)}$$

Если определим теперь полярную нормаль для точки P, то получим

$$N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \ln^2 a} =$$
$$= \sqrt{a^{2\varphi}(1 + \ln^2 a)} = \sqrt{\rho^2 (1 + \ln^2 a)} =$$
$$= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(1 + \ln^2 a)}$$

Таким образом оказывается $d = N$, т. е диаметр полученного круга равен полярной нормали точки P, из которой выходят касательные.

Проводя совершенно подобные рассуждения, можно показать, что основания нормалей, проведенных к логарифмической спирали из некоторой

точки P плоскости, лежат на круге:

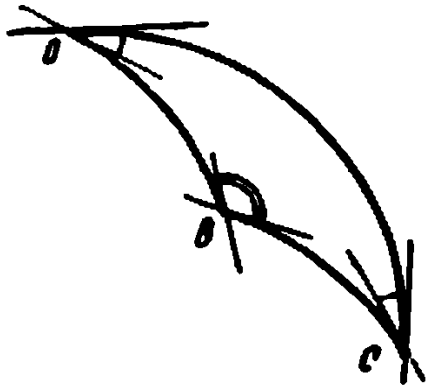
$$(x^2+y^2)\ln a-(y_1+x_1\ln a)x+(x_1-y_1\ln a)y=0,$$

проходящем через точку P и полюс спирали, причем диаметр этого круга равен полярной касательной, проведенной в точке P.

Покажем еще одно интересное свойство логарифмической спирали.

Предположим, что мы имеем три логарифмических спирали $\rho=a_1^{\varphi}$, $\rho=a_2^{\varphi}$ и $\rho=a_3^{\varphi}$, имеющих общий полюс. Покажем, что сумма углов криволинейного треугольника, образованного пересекающимися дугами этих спиралей, равна 180° (черт. 146).

Для доказательства этого положения обозначим предварительно углы, составляемые касательными к спиралям в точках пересечения через A, B и C, а угловые коэфициенты касательных через k_1, k_2, k_3.



Черт 146

Тогда:

$$\operatorname{tg}A=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2};$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3};$$

$$\operatorname{tg}C=\frac{k_3-k_1}{1+k_3k_1}.$$

Но из тригонометрии известно, что если

$$A+B+C=180°,$$

то

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

Таким образом, чтобы убедиться, что для нашего случая $A+B+C=180°$, достаточно убедиться, что:

$$\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}+\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}+\frac{k_3-k_1}{1+k_3k_1}=\frac{(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)}{(1+k_1k_2)(1+k_2k_3)(1+k_3k_1)}.$$

Приведя левую часть к общему знаменателю, мы, действительно, убеждаемся в справедливости этого равенства. Таким образом $A+B+C=180°$.

Определим теперь S_T, S_N, T и N для логарифмической спирали.

Имеем:

$$S_T = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{n^{2\varphi}}{n^{\varphi} \ln n} = \frac{n^{\varphi}}{\ln a} = \frac{\rho}{\ln a},$$

$$S_N = \rho' = n^{\varphi} \ln n = \rho \ln a$$

$$T = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^2}{\ln^2 n}} = \rho \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}},$$

$$N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \ln^2 n} = \rho \sqrt{1 + \ln^2 a}.$$

Из полученных пырпжений замечпем, что полпрные касптельппп, пормпль, подкпсптельнпп и подпормпль логпрнфмнческой сппрпли пропорцнопльны рпднусу-пектору.

Зпметим еще, что если сппрпль дппп урпппепием

$$\rho = e^{\varphi},$$

то из полученпых пырпжепний, замеппп п пих п через е, ппйдем, что п этом случпе подкпсательнпп рапнп поднормплп, п кпсптельпап рпппп пормпли.

Зпкппчнпп рпссмотрепие спойстп логарифмнческой спирплп, укпжем еще пп одпо пз пих: еслп нп поперхность прпмого кругопого конусп пппестн крпвую, пересекающую псе обрпзующне под одним и тем же углом, тпк назыпаемую цплиндро-копическую гелису, то проекцип ее пп оспоппине копусп будет логпрнфмнческой сппрплью.

Длнпп дуги и площадь секторп логарнфмнческой спирали

Определим длину дуги логарнфмпческой спирали между точкпми (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2).

Имеем:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{n^{2\varphi} + n^{2\varphi} \ln^2 a}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \ln^2 n}}{\ln n} (n^{\varphi_2} - n^{\varphi_1}) = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 n}}{\ln n} (\rho_2 - \rho_1).$$

Иптереспо заметитъ, что если предстпппть длнпу дуги п пиде:

$$S = \rho_2 \frac{\sqrt{1 + \ln^2 n}}{\ln n} - \rho_1 \frac{\sqrt{1 + \ln^2 n}}{\ln n},$$

то стппопитсп очепндпым, что длнпп дуги логпрнф-

мической спирали равна разности полярных координат, проведенных к ее концам.

При $\rho_1 = 0$ получаем:

$$S = \rho_2 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} = T.$$

Таким образом длина дуги логарифмической спирали от начала до произвольной точки равна длине полярной координаты, проведенной к спирали в этой точке.

Эти свойства позволяют спрямлять дугу логарифмической спирали графическим способом.

Определим площадь сектора, заключающегося между логарифмической спиралью $\rho = a^{\varphi}$ и двумя радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2, соответствующими амплитудам φ_1 и φ_2.

Имеем

$$U = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^{2\varphi} d\varphi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{4 \ln a}$$

Применяя полученную формулу к спирали $\rho = e^{\varphi}$, найдем, что площадь, описываемая радиусом-вектором этой спирали, равна одной четверти площади квадрата, построенного на радиусе-векторе.

Построение логарифмической спирали.

Построение логарифмической спирали может быть выполнено следующим образом: пусть имеем спираль $\rho = 2^{\varphi}$, предположим, что мы хотим построить 8 точек этой спирали, лежащих на дуге, соответствующей изменению амплитуды от 0 до π.

Тогда полагаем $\varphi = \frac{n}{8}\pi$ и, в таком случае, очевидно,

$\rho = 2^{\frac{n}{8}\pi}$ или $\rho = 2^{\frac{\pi}{8}n} = 1{,}31^n$.

Таким образом можно составить следующую таблицу:

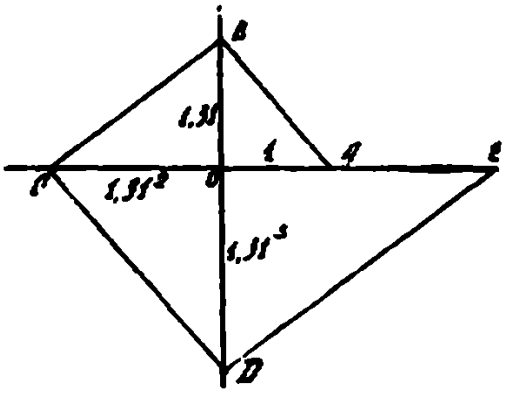
φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}2$	$\frac{\pi}{8}.3$	$\frac{\pi}{8}4$	$\frac{\pi}{8}.5$	$\frac{\pi}{8}.6$	$\frac{\pi}{8}.7$	π
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ	1	1,31	$1{,}31^2$	$1{,}31^3$	$1{,}31^4$	$1{,}31^5$	$1{,}31^6$	$1{,}31^7$	$1{,}31^8$

Для нахождения степеней числа 1,31 воспользуемся графическим способом возведения в целую степень.

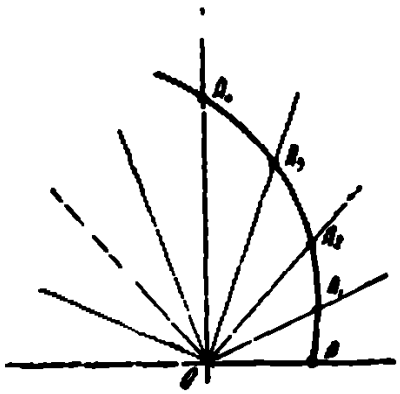
Откладываем $OA = 1$ (черт. 147); на перпендикуляре к OA откладываем $OB = 1{,}31$; проведя $BC \perp BA$ получим, на основании геометрич. теоремы, $OC = 1{,}31^2$; проведя $CD \perp BC$, получим $OD = 1{,}31^3$ и т. д.

После этого сможем построить точки иной спирали.

Откладываем $OA = 1$ (черт. 148), затем проведем лучи, составляющие друг с другом угол $= \frac{\pi}{2}$. На 1-м луче



Черт 147

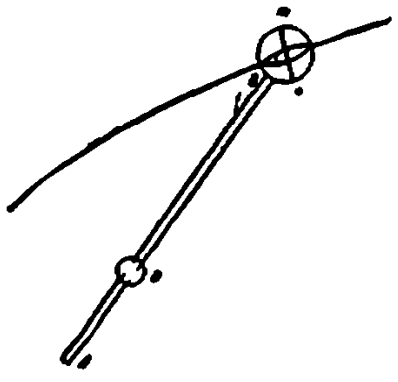


Черт 148

откладываем отрезок $OA_1 = OB = 1{,}31$, на 2-м луче—отрезок $OA_2 = OC = 1{,}31^2$, на 3-м луче— $OA_3 = OD = 1{,}31^3$ и т. д.

Точки A, A_1, A_2, A_3 и A_4 будут точками иной спирали.

Прибор для вычерчивания логарифмической спирали состоит из стойки O, которая может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, и стержня AB, свободно двигающегося поступательно в цилиндрическом отверстии стойки O (чертеж 149); на конце этого стержня укреплена рама, несущая тяжелое металлическое колесико с остро отточенными краями, ось которого может быть наклонена к стержню AB под любым углом, но всегда остается параллельной плоскости чертежа. Колесико, опираясь на плоскость чертежа, будет поддерживать конец B стержня. Если заставить это колесико двигаться без скольжения по бумаге, то направление его движения будет составлять со стержнем AB постоян-



Черт 149

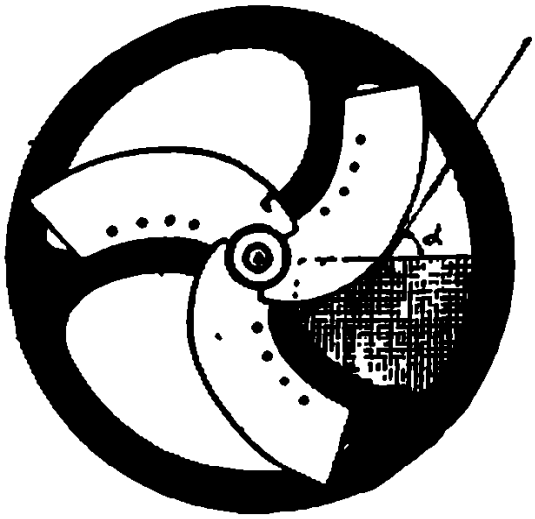
ный угол, п трпекторип дпижеиип окпжетсп логприфмической спирплью.

Применения логарифмической спирали.

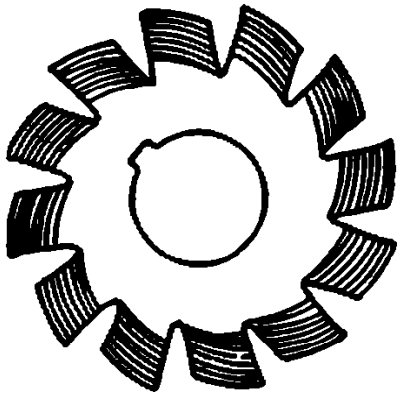
Технические примепепия спирали осиовапы п большпп-стпе случпеп пп ее спойстпе сохрпнять постопипым угол между кпсптельпой и радпусом-пектором точки кпсппип.

1. Профиль прпщпющегосп пожа.

Тпк ппример, фрезы токпрпого стппкп длп обтпчиппппип метпллических предметоп имеют профиль, очерченный по логприфмической спирали, блпгодпрп чему тпк пазыппемый „угол резапип", т. е. угол между лезппем пожп и иппрпп-



Черт 150.



Черт 151.

леппем скоростп остпется псе время иеизмепным. Нпипыгодпейшпп пелпчипп углп резаппя определпетсп кпчестпом обрпбптываемого мптериалп и может быть подобрппп длп каждого случпп при ппличпп ппборп фрез с разлпчпыми углпми резаппп.

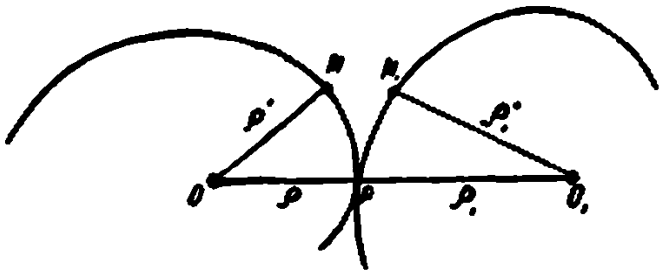
Нп чертежах 150 и 151 прпподится прпщпющийсп пож соломорезки и одпп из фрез токарпого стапкп.

2. Зубчптые колесп Вейсбпхп.

Логприфмпческпп спираль используется п теории мехпизмоп при построепии зубчпток с перемеппым передпточным чпслом, тпк называемых колес Вейсбахп.

Логарифмическая спираль

Представим себе два квадрата расположенными так, как показано на чертеже 153. Вообразим далее, что через середину и конец каждой стороны этих квадратов проведены дуги одинаковых логарифмических спиралей с полюсами в центрах квадратов, одна из которых закручивается по часовой стрелке, другая—против. В точке P спирали касаются друг друга.



Черт. 152.

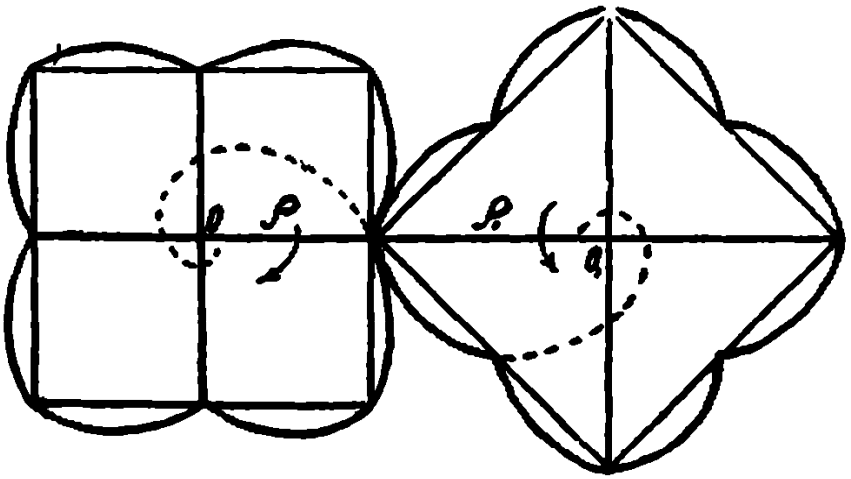
Нетрудно показать, что при вращении квадратов вокруг их центров дуги спиралей будут катиться одна по другой без скольжения.

Действительно, пусть M и M_1—две точки спиралей, взятые так, что:

$$OM + OM_1 = OP + O_1P \quad \text{(черт 152)},$$

или в иных обозначениях:

$$\rho' + \rho'_1 = \rho + \rho_1. \tag{1}$$



Черт. 153.

Очевидно, для того, чтобы спирали плавно катились одна по другой, необходимо, чтобы точки M и M_1 одновременно пришли на линию центров OO_1, а для этого необходимо, чтобы:

$$\smile PM = \smile PM_1 \tag{2}$$

по
и

$$\smile PM = \sqrt{1+\ln^2 n}\,(\rho_1 - \rho)$$

$$\smile PM_1 = \sqrt{1+\ln^2 n}\,(\rho_1' - \rho'),$$

из рпвепства же (1) следует

$$\rho_1 - \rho = \rho_1' - \rho',$$

откудп пспо, что рппепстпо (2) спрапедлнпо.

Передаточпое число k, т. е. отпошеине углопых скоростей колес Вейсбпхп будет при врпщепии их мепптьсп непрерыппо; при этом п течепне одпого оборота опо будет достигпть 4 рпза mпх и 4 рпза mіn, причем:

$$k_{max} = \frac{OP}{O_1P} \quad \text{и} \quad k_{min} = \frac{O_1P}{OP}$$

Прпктическое примеиепне колес Вейсбахп огрппичепо, вследстпие трудности их изготовлепип.

3. Логприфмическпп спирпль п гидротехпике и п природе.

В гидротехпике тпкже испольэуютсп спойстпа логарифмической спирпли при сооружеиии спиральных подподоп к гидрпвлическим турбиппм

Логарифмическая спирпль пстречпетсп и п цпрстпе природы, по пей эппертыппютсп рпкопины моллюсков, ппзыппемых пммоиитпми, и иекоторых морских улиток.

Зпметим п заключепне, что логприфмическпп спираль былп открытп одпопремеипо Декпртом и Торичеллп. Нпзвппие ее было предложепо Вприпьопом.

Целый рпд спойстп логприфмической спирпли открыт Бернулли, который особеппо восхищплсп этой крипой; ип могильиой плпте его пыбитп, соглпспо его желппию, логпрпфмическпп сппрпль.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ.

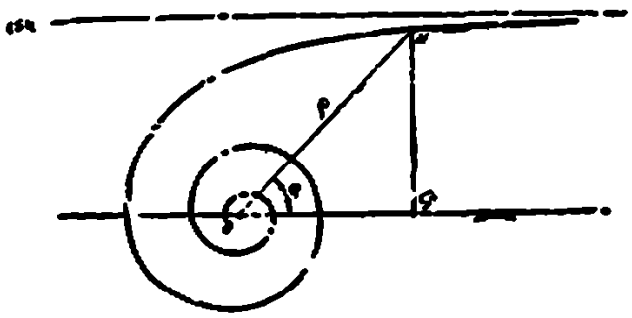
Исследование формы.

Гиперболической спиралью называют кривую, уравнение которой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = \frac{a}{\varphi},$$

где a—некоторая постоянная, которую будем считать положительной.

Из уравнения этой спирали следует, что при $\varphi = 0$ $\rho = \infty$, при возрастании φ от 0 до ∞ радиус-вектор ρ стремится от ∞ к 0.



Черт 154

Это показывает, что гиперболическая спираль должна состоять из бесчисленного множества витков, закручивающихся вокруг полюса против часовой стрелки (черт. 154), Полюс, таким образом, будет для спирали так называемой асимптотической точкой, т. е. точкой, к которой спираль может подойти как угодно близко, но никогда не достигнет ее.

Заметим, что если φ, изменяясь от 0 до ∞, будет оставаться отрицательной величиной, то закручивание спирали будет происходить по часовой стрелке.

Выясним геометрическое значение a.

Из $\triangle OMP$ имеем:

$$MP = \rho \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}$$

Возьмем пределы, полпгпп $\varphi \to 0$

$$\lim MP = n \lim \frac{\sin \varphi}{\varphi}_{\varphi \to 0} = a .$$

Тпкпм обрпзом при стремлеппп φ к 0, MP—рпсстоппне точки, взптой пп спирали от полпрпой оси—стремитсп к п; отсюда следует, что прпмпп $y = a$ будет пссимптотой гиперболпческой спирплп.

Исследуем крипизиу гиперболической спирали. Имеем формулу длп определепип раднусп крипизпы:

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} .$$

В ппшем случпе:

$$\rho' = -\frac{n}{\varphi^2} ,$$

$$\rho'' = \frac{2a}{\varphi^3} ,$$

и, следоптельпо:

$$R = \frac{\left(\frac{n^2}{\varphi^2} + \frac{n^2}{\varphi^4}\right)^{3/2}}{\frac{n^2}{\varphi^2} + 2\frac{n^2}{\varphi^4} - 2\frac{n^2}{\varphi^4}} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right)^{3/2}}{\varphi} = \rho\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{3/2}.$$

Из полученной формулы пидпо, что при возрастапип ρ от 0 до ∞, радиус кривизпы R позрпстпет от 0 до ∞, и, следопательпо крипизпп спирплп будет убыпть от ∞ до 0. К этим же пыводпм можио притти из чпсто геометрических сообрпжеппй.

Свойства гиперболической спирали.

Определим угол ψ, под которым гпперболическап спирэль пересекает спои рпдпусы-пекторы.

Изпестно, что вообще $\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\rho'}$,

длп ппшего случпп·

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{n}{\varphi}}{-\frac{a}{\varphi^2}} = -\varphi,$$

откуда: $$\psi = \operatorname{arc\,tg}(-\varphi).$$

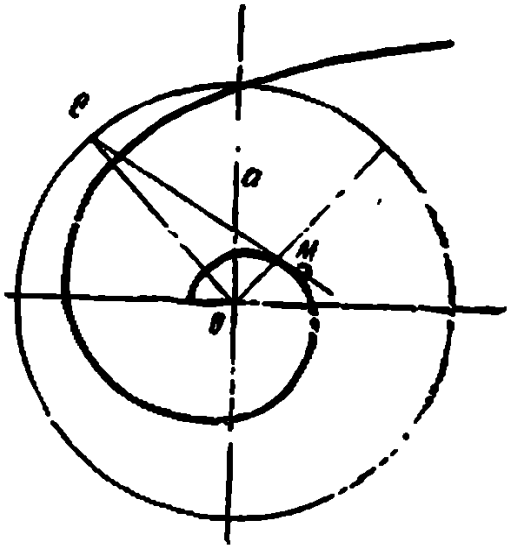
Найдем теперь S_T, S_N, T и N для гиперболической спирали и рассмотрим некоторые свойства спирали, связанные с этими отрезками.

Имеем:

$$S_T = \frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{\frac{a^2}{\varphi^2}}{-\frac{a}{\varphi^2}} = -a.$$

Из полученного выражения видно, что **полярная подкасательная гиперболической спирали является величиной постоянной.**

Отсюда тотчас вытекает следствие о том, что **концы полярных подкасательных гиперболической спирали лежат на окружности круга, центр которого находится в полюсе, а радиус равен a.**



Черт. 155.

Это обстоятельство дает легкий **способ построения касательной в любой точке M гиперболической спирали.**

Очевидно, для этого достаточно из перпендикуляре к радиусу-вектору отложить отрезок OC равный a; тогда прямая, проведенная через точки C и M, и будет касательной (черт. 155).

Определив полярную поднормаль, касательную и нормаль, получаем:

$$S_N = \rho' = -\frac{a}{\varphi^2},$$

$$T = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho^2}{\rho'}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + a^2},$$

$$N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{\rho}{a}\sqrt{\rho^2 + a^2}.$$

Длина дуги и площадь сектора.

Найдем длину дуги гиперболической спирали между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2).

Имеем

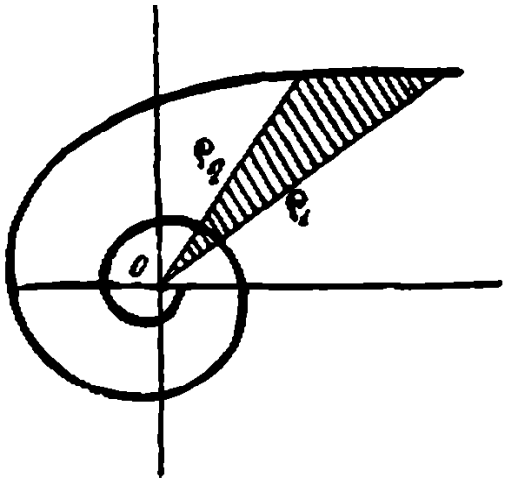
$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi=a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\frac{1}{\varphi^4}+\frac{1}{\varphi^2}}\,d\varphi=$$

$$=a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Окончательно:

$$S=a\left[\ln\frac{\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}}-\frac{\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_2}+\frac{\sqrt{1+\varphi_1^2}}{\varphi_1}\right]$$

Определим площадь сектора между дугой гиперболической спирали и двумя радиусами-векторами, соответствующими амплитудам φ_1 и φ_2.



Черт 156

Имеем:

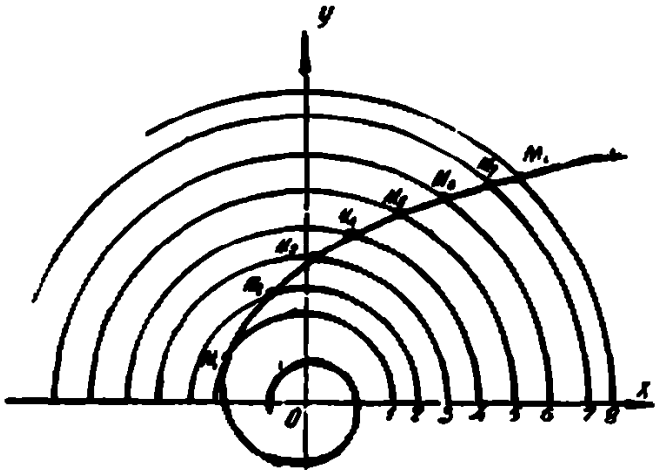
$$U=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\varphi^2}=\frac{a^2}{2}(\rho_1-\rho_2).$$

Из полученной формулы следует, что площадь, ограниченная двумя любыми радиусами-векторами гиперболической спирали, пропорциональна разности этих радиусов (черт. 156).

Построение гиперболической спирали.

Проводим из точки O как из центра ряд концентрических окружностей (чертеж 157). Откладываем на них дуги: $1M_1$, $2M_2$, $3M_3$, $4M_4$ и т. д., каждая из которых

рпппп п. Тогдп точки M_1, M_2, M_3, M_4 и т. д. будут прпппдлежать гпперболпческой спирпли, ибо длп кпждой из пнх $\rho\varphi = n$ или $\rho = \frac{n}{\varphi}$.



Черт. 157.

Зпметим п заключепне, что гиперболическпп спирпль открытп п ппчале XVIII столетпп И. Бернулли и Вприньопом.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ СПИРАЛИ.

Синусоидальными спиралями называются кривые, уравнения которых имеют вид:

$$\rho^m = a^m \operatorname{Sin} m\varphi$$

или:

$$\rho^m = a^m \operatorname{Cos} m\varphi.$$

Это—весьма обширный класс кривых, подобно классу циклических кривых, но еще более богатый по разнообразию и сложности форм. Самые, казалось бы, ничего общего не имеющие кривые, объединяются в этом классе. В силу этого обстоятельства чрезвычайно трудно сделать какие-либо общие выводы относительно формы синусоидальных спиралей, как это было сделано, например, относительно циклических кривых.

Для ознакомления ближайшего рассмотрим некоторые частные случаи уравнения $\rho^m = a^m \operatorname{Cos} m\varphi$.

Полагая $m = 1$, мы получаем уравнение:

$$\rho = a \operatorname{Cos} \varphi,$$

Это, как известно, уравнение **окружности**, центр которой лежит на полярной оси, которая проходит через полюс и имеет диаметр, равный a.

При $m = -1$, получим уравнение:

$$\rho^{-1} = a^{-1} \operatorname{Cos} \varphi$$

или

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{Cos} \varphi},$$

то это—уравнение **прямой**, перпендикулярной к полярной оси.

При $m = 2$ получится уравнение $\rho^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi$, которое выражает кривую, называемую **лемнискатой**. Подробным изучением ее мы займемся в дальнейшем.

При $m = -2$, получим:

$$\rho^{-2} = a^{-2} \operatorname{Cos} 2\varphi,$$

или:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\operatorname{Cos} 2\varphi};$$

кривая, выражаемая этим уравнением, является равносторонней гиперболой.

При $m=\frac{1}{2}$, имеем:

$$\rho^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

или:

$$\rho=a\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

получаемая при этом кривая—кардиоида—принадлежала, как мы видели, к классу эпициклоид.

При $m=-\frac{1}{2}$, имеем:

$$\rho^{-\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

или

$$\rho=\frac{2a}{1+\cos\varphi};$$

кривая, получаемая при этом, как известно из теории конических сечений, представляет собой параболу.

Из приведенных примеров должно быть ясно, насколько различные кривые относятся к классу синусоидальных спиралей, и отсюда должна быть понятна трудность изучения этого класса кривых в целом.

Сделаем одно важное замечание относительно формы синусоидальных спиралей. Непосредственно из уравнения этих кривых следует, что при положительных значениях параметра синусоидальные спирали проходят через полюс и лежат в конечной части плоскости, при отрицательных же значениях этого параметра они не проходят через полюс и состоят из бесконечных ветвей.

Геометрические свойства синусоидальных спиралей.

Рассмотрим некоторые свойства синусоидальных спиралей, присущие им всем.

Покажем, что угол ψ, образуемый касательной в какой-либо точке синусоидальной спирали $\rho^m=a^m\sin m\varphi$ с радиусом-вектором этой точки, равен $m\varphi$, а перпендикуляр, опущенный из полюса на касательную, образует с полярной

осью угол $\theta=(m+1)\varphi-\frac{\pi}{2}$ (черт. 158).

Действительно, так как вообще:

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\rho'},$$

и мы имеем случае

$$m\rho^{m-1}\rho'=mn^m\operatorname{Cos}m\varphi$$

и, следовательно:

$$\rho'=\frac{n^m\operatorname{Cos}m\varphi}{\rho^{m-1}}=\frac{\rho}{\operatorname{tg}m\varphi},$$

то:

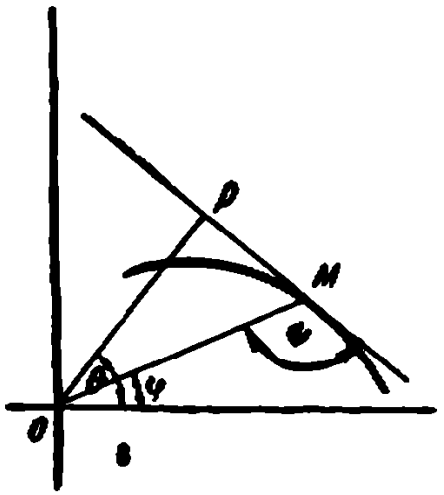
$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\rho}{\frac{\rho}{\operatorname{tg}m\varphi}}=\operatorname{tg}m\varphi,$$

откуда следует:

$$\psi=m\varphi.$$

Далее. так как $\psi=\theta-\varphi+\frac{\pi}{2}$, то заменив ψ через $m\varphi$, получим

$$\theta=(m+1)\varphi-\frac{\pi}{2}.$$

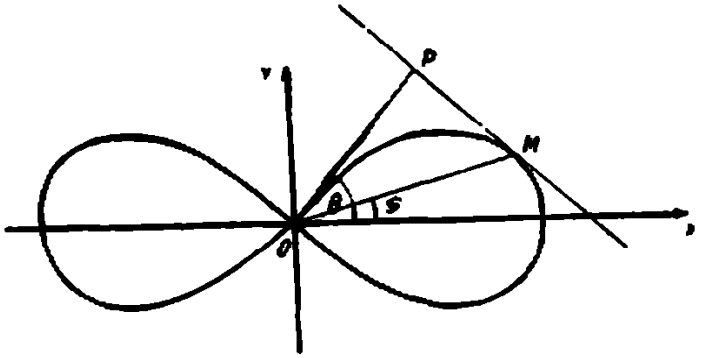


Черт 158.

Для синусоидальных спиралей вида $\rho^m=n^m\operatorname{Cos}m\varphi$ совершенно таким же образом можно получить следующие формы:

$$\psi=m\varphi+\frac{\pi}{2}$$

$$\theta=(m+1)\varphi.$$



Черт 159

Только что полученные формулы дают возможность быстро строить касательную и нормаль в любой точке синусоидальной спирали.

Так для лемнискаты $\theta = 3\varphi$, следовательно, для построения каустической в точке M достаточно построить угол POX (черт. 159), равный 3φ, и из точки M опустить перпендикуляр на прямую OP; этот перпендикуляр и будет каустической.

Определим радиус кривизны синусоидальных спиралей.

Имеем вообще:

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

по из уравнения:

$$\rho^m = a^m \operatorname{Sin} m\varphi$$

следует:

$$\rho^{m-1}\rho' = a^m \operatorname{Cos} m\varphi,$$

$$\rho^{m-1}\rho'' + (m-1)\rho^{m-2}\rho'^2 = -ma^m \operatorname{Sin} m\varphi = -m\rho^m,$$

и, следовательно:

$$\rho\rho'' + (m-1)\rho'^2 = -m\rho^2,$$

но в таком случае знаменатель в выражении для R обратится в:

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = (m+1)(\rho^2 + \rho'^2)$$

и, следовательно, для R получим выражение:

$$R = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{m+1};$$

Теперь остается определить $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$.

Так как:

$$\rho^{m-1}\rho' = a^m \operatorname{Cos} m\varphi,$$

то:

$$\rho' = \frac{a^m \operatorname{Cos} m\varphi}{\rho^{m-1}} = \rho \operatorname{Ctg} m\varphi$$

и, следовательно:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \rho\sqrt{1 + \operatorname{Ctg}^2 m\varphi} = \frac{\rho}{\operatorname{Sin} m\varphi}.$$

Тогда имеем:

$$R = \frac{\rho}{(m+1)\operatorname{Sin} m\varphi} = \frac{a^m}{(m+1)\rho^{m-1}}.$$

Заметим следующее: мы имели для радиуса кривизны выражение:

$$R = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{m+1},$$

но с другой стороны длина полярной нормали выражается формулой:

$$N = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Сопоставляя эти равенства, находим интересное свойство синусоидальной спирали: **полярная нормаль в некоторой точке синусоидальной спирали в $m+1$ раз больше радиуса кривизны в этой точке.**

Полученное выражение для радиуса кривизны и свойство, выражающее зависимость между радиусом кривизны и полярной нормалью, будут справедливы и для спирали вида

$$\rho^m = a^m \operatorname{Cos} m\varphi.$$

Покажем, что в **синусоидальных спиралях $\rho^m = a^m \operatorname{Sin} m\varphi$ круг кривизны, соответствующий некоторой точке M, отсекает от радиуса-вектора отрезок, длина которого равна $\frac{2\rho}{m+1}$** (черт. 160).

Действительно, из треугольника MNK имеем:

$$MN = 2R \operatorname{Sin} \psi,$$

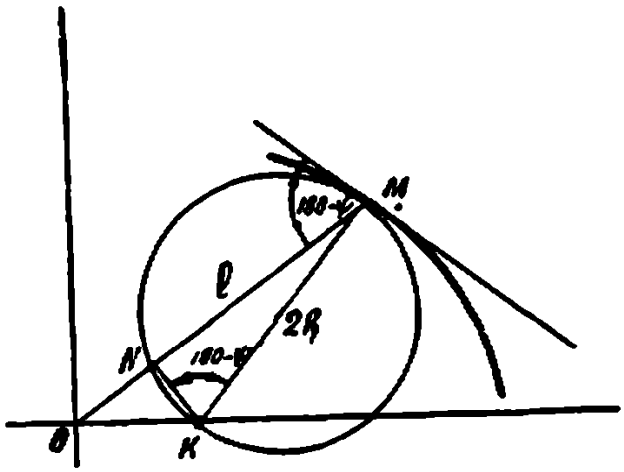
но

$$R = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{m+1}$$

и

$$\operatorname{Sin} \psi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

откуда:



Черт 160.

$$MN = 2\frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}{m+1} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = \frac{2\rho}{m+1}, \text{ ч. т. д.}$$

Полученное выражение справедливо и для синусоидальных спиралей вида $\rho^m = a^m \operatorname{Cos} m\varphi$.

Покажем еще одно свойство синусоидальных спиралей: **угол γ между двумя касательными, проведенными в концах хорды, проходящей через полюс спирали, является величиной постоянной** (черт. 161).

В самом деле, по предыдущему имеем:

$$\psi_1 = m\varphi_1$$

и $$\psi_2 = m\varphi_2 = m(\pi + \varphi_1)$$

Тогда:

$$\gamma = \psi_1 - \psi_2 = m\varphi_1 - m(\pi + \varphi)$$

или

$$\gamma = -n_1\pi.$$

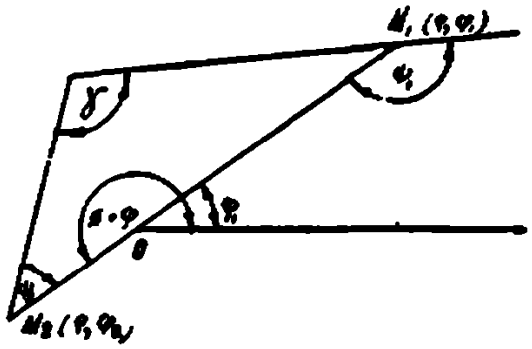
Покажем в заключение, что подэрою синусоидальной спирали m-го порядка относительно полюса является синусоидальная спираль $\frac{m}{m+1}$-го порядка.

Таким образом, если данная спираль:

$$\rho^m = a^m \operatorname{Cos} m\varphi,$$

то ее подэра:

$$\rho^{\frac{m}{m+1}} = n^{\frac{m}{m+1}} \operatorname{Cos} \frac{m}{m+1}\varphi.$$



Черт. 161

Чтобы получить уравнение подэры, необходимо установить зависимость между ρ и φ—текущими координатами точки N (черт. 162).

Проще всего это сделать, определив длину $ON = \rho$ из $\triangle OMN$.

Имеем: $$\rho = \rho_1 \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi_1),$$

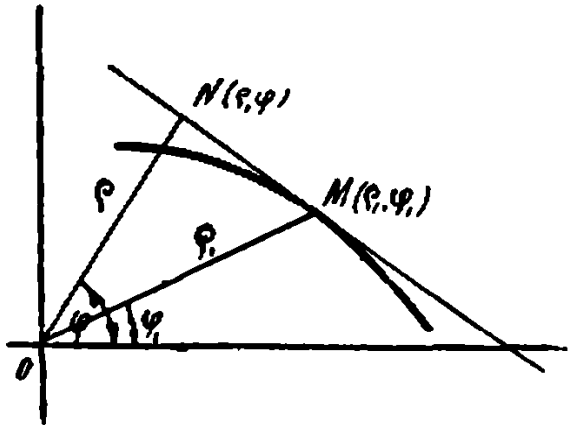
но

$$\rho_1 = n\sqrt[m]{\operatorname{Cos} m\varphi_1}$$

и так как по предыдущему:

$$\varphi = (m+1)\varphi_1,$$

то $$\varphi_1 = \frac{\varphi}{m+1}.$$



Черт 162

Подставив, получим:

$$\rho = n\sqrt[m]{\operatorname{Cos}\frac{m\varphi}{m+1}} \times \times \operatorname{Cos}\left(\varphi - \frac{\varphi}{m+1}\right)$$

или:

$$\rho = n \operatorname{Cos}^{\frac{m+1}{m}} \frac{m}{m+1}\varphi,$$

откуда, возвышая обе части в $\frac{m}{m+1}$-ую степень, получим уравнение подэры:

$$\rho^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \operatorname{Cos} \frac{m}{m+1} \varphi.$$

Совершенно подобным свойством обладают спирали вида:

$$\rho^m = a^m \operatorname{Sin} m\varphi.$$

Применяя полученное свойство в частности к случаю $m = 1$, мы приходим к заключению, что подэрой окружности служит кардиоида. К подобному же выводу мы пришли раньше, изучая кардиоиду отдельно.

Синусоидальные спирали, соответствующие целым значениям параметра.

Выше мы уже отметили, что синусоидальные спирали обладают чрезвычайным разнообразием форм. Сделать какие-либо общие заключения о форме этих кривых при произвольных значениях m не представляется возможным, но если предположить, что m принимает только целые значения, то нетрудно видеть, что в этом случае синусоидальные спирали будут иметь много общего в своих формах. Нетрудно показать, что при этом условии каждая из них будет состоять из симметрично расположенных и подобных между собой лепестков.

В самом деле, из уравнения $\rho^m = a^m \operatorname{Sin} m\varphi$ следует, что ρ является периодической функцией с периодом в $\frac{360^\circ}{m}$. Таким образом через каждые $\frac{360^\circ}{m}$ радиус-вектор синусоидальной спирали будет повторять ход своего изменения.

Следовательно, если вообразить, что из полюса проведено $2m$ лучей, между каждыми двумя из которых содержится угол $\frac{360^\circ}{2m}$, то в каждой паре соседних углов, составляющих, очевидно, угол в $\frac{360^\circ}{m}$, будет целиком умещаться один лепесток кривой, и вся кривая таким образом будет состоять из таких лепестков, симметрично расположенных и подобных между собой.

Лемниската Бернулли.

Одной из наиболее замечательных и изученных синусоидальных спиралей является лемниската (λημνίσκος—бант или лента).

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении этой кривой.

Уравнение лемнискаты имеет вид:

$$\rho^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi,$$

Из этого уравнения следует, на основании вышеделанных замечаний, что лемниската должна состоять из двух лепестков, причем из уравнения же непосредственно видно, что полярная ось будет служить осью симметрии этой кривой.

Легко перейти к уравнению лемнискаты в декартовой форме. Переписав прежнее уравнение в виде

$$\rho^2 = a^2 (\operatorname{Cos}^2 \varphi - \operatorname{Sin}^2 \varphi)$$

и заменяя ρ^2 через $x^2 + y^2$ и $\operatorname{Cos}\varphi$ через $\frac{x}{\rho}$, а $\operatorname{Sin}\varphi$ через $\frac{y}{\rho}$, мы получим:

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

или:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Полученное уравнение показывает, что лемниската является алгебраической кривой 4-го порядка.

Параметрические уравнения лемнискаты могут быть записаны в следующем виде:

$$x = \frac{a^2 t (t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}; \qquad y = \frac{a^2 t (t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

По виду этих уравнений заключаем, что лемниската относится к классу уникурсальных кривых.

Лемнискату можно рассматривать как геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная. Покажем это.

Пусть F и F_1 данные точки, расстояние между которыми обозначим через 2b (черт. 163).

Выбпрпем соответствующим образом систему координпт. Произведение $MF \cdot MF_1$ обозначим через a^2; тогдп уравпеппе кривой припимпет пид:

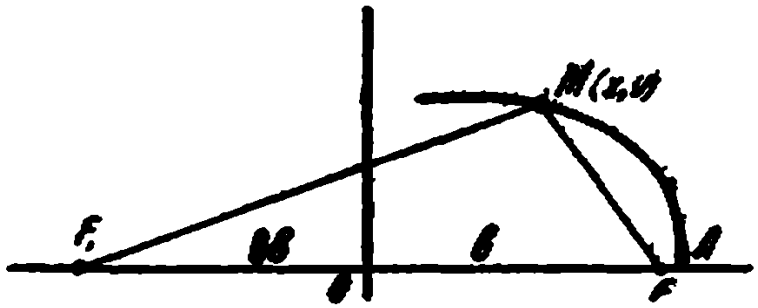
$$MF \cdot MF_1 = a^2,$$

или:

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2;$$

после упрощеппй получаем:

$$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2-y^2) = a^4 - b^4.$$



Черт. 163.

Полученное урапнепие является уравнением кривой, пазываемой овалом Кассипи. При $b=a$ получаем частпый случпй овала Кассипи, а имепно кривую:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),$$

по это и есть уравпепие лемпискаты.

Геометрическое свойство лемпискаты.

Перейдем теперь к рассмотрепию некоторых особепностей и свойств лемппскаты.

Прежде всего замечаем, что в пачале координат лемппскатa имеет двойную точку. Для получепия уравпепий касательных в этой точке приравпяем нулю члепы низшей степепи в уравпепии лемпискаты.

Имеем:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

откуда: $x-y=0$ и $x+y=0$.

Из полученных уравпепий видно, что касательные к лемпискате в пачале координат взаимно перпендикулярны и служат бпссектрисами координатных углов.

Рассмотрев общие свойства синусоидальных спиралей, мы получили формулу для радиуса кривизны. Применяя эту формулу к лемнискате, получим:

$$R = \frac{n^2}{3\rho}$$

откуда:

$$K = \frac{3\rho}{a^2}.$$

Получение формул показывает, что кривизна лемнискаты прямо пропорциональна радиусу-вектору данной точки.

Так как в самом полюсе $\rho = 0$, то и $K = 0$; это показывает, что вблизи полюса лемниската весьма тесно соприкасается со своей касательной.

Непосредственно из общих свойств синусоидальных спиралей вытекает также, что полярная нормаль в некоторой точке лемнискаты в 3 раза больше радиуса кривизны в этой точке. Угол, составленный касательной в какой-либо точке лемнискаты с радиусом-вектором этой точки, в 2 раза больше полярного угла, соответствующего этой точке.

Угол, составленный перпендикуляром, опущенным из касательную из начала координат, и полярной осью, в 3 раза больше полярного угла точек касания.

Последними свойствами удобно пользоваться при построении касательной и нормали к лемнискате, как было указано выше.

Из общих свойств синусоидальных спиралей следует также, что подерою лемнискаты относительно полюса является синусоидальная спираль, имеющая уравнение: $\rho^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cos\frac{2}{3}\varphi$, наконец: лемниската является подерой равносторонней гиперболы относительно ее центра.

Построение лемнискаты графическим и механическим путем.

Рассмотрим построение лемнискаты при помощи циркуля и линейки. Для этой цели уравнение лемнискаты

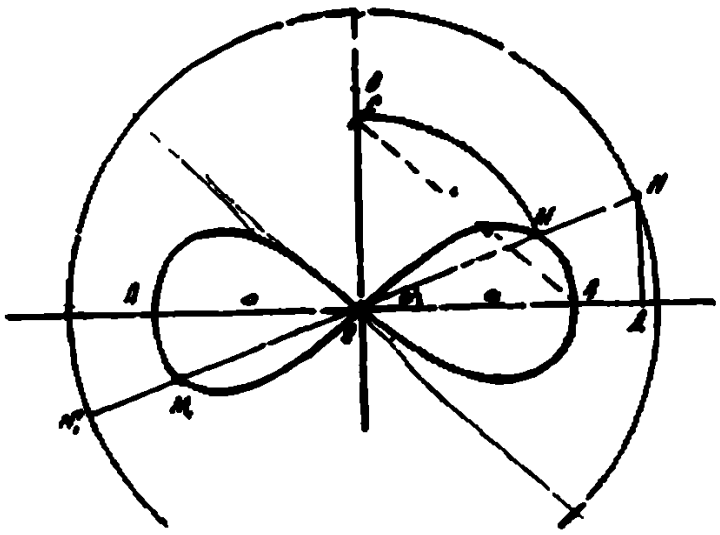
$$\rho^2 = n^2 \cos 2\varphi$$

предствпм яредварительпо п виде $\rho^2 = 2n^2 \cos^2\varphi - n^2$ или:

$$\rho^2 = (n\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - n^2.$$

Из яоследнего урпапения видно, что радиус-пектор можпо рпссмптриппть кпк катет прямоугольпого треугольника, гпяотепузп которого раппа $a\sqrt{2}\cos\varphi$, п другой кптет рппеп п.

Для осуществплепия такого треугольппкп яостуяаем следующим обрпзом:



Черт. 164.

От точки О откпдываем отрезкп $OA = OA_1 = n$ (черт. 164). Точки А и A_1, очепидпо, прппдлежпт крппой.

Откпдываем отрезки $OB = a$; радиусом, рппиым $AC = n\sqrt{2}$ яроводпм окружность.

Под произвольпым, по меньшим 45°, углом φ к яолярпой оси яроводим луч N_1ON.

Из точки N ояускпем яерпендикуляр ND.

Из точки А рпдиусом, раапым OD, засекпем пп OB точку С.

Тогда $\triangle OCA$ и будет искомым.

В самом деле:

$$OC^2 = AC^2 - OA^2 = OD^2 - OA^2 = (ON\cos\varphi)^2 - OA^2 =$$

$$= (a\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - a^2.$$

Следовательпо, ОС п будет радиусом-пектором, соответствующим углу φ.

Теперь остается рпдиусом ОС сделпть на луче N_1ON засечки п точках М и M_1.

Полученные точкп будут прппадлежать лемппскате.

Проведя следующий луч под углом φ_1 и выполнив указанное построение, мы получим еще пару точек и т. д.

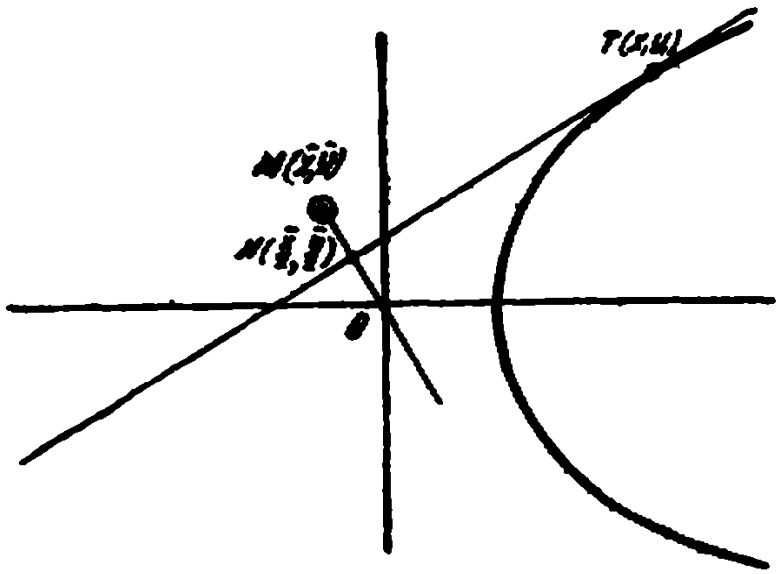
Лемнискату можно вычертить механическим путем, как след середины большого стержня шарнирного пятипараллелограмма, противоположное звено которого закреплено.

Чтобы показать это, рассмотрим предварительно такую задачу: найти геометрическое место точек, симметричных с центром равнобочной гиперболы:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

по отношению к ее касательным.

Пусть $M(\bar{x}, \bar{y})$ — точка искомого геометрического места (черт. 165).



Черт. 165.

Тогда: $xx_1 - yy_1 = a^2$ ..... уравнение касательной,

$$y = -\frac{y_1}{x_1}x \text{ ..... уравнение прямой.}$$

Так как точка $M(\bar{x}, \bar{y})$ лежит на касательной и на прямой OM, то:

$$\bar{x}x_1 - \bar{y}y_1 = a^2 \qquad (1)$$

$$\bar{y} = -\frac{y_1}{x_1}\bar{x} \qquad (2)$$

Кроме этого, так как точка $T(x_1, y_1)$ лежит на гиперболе, то

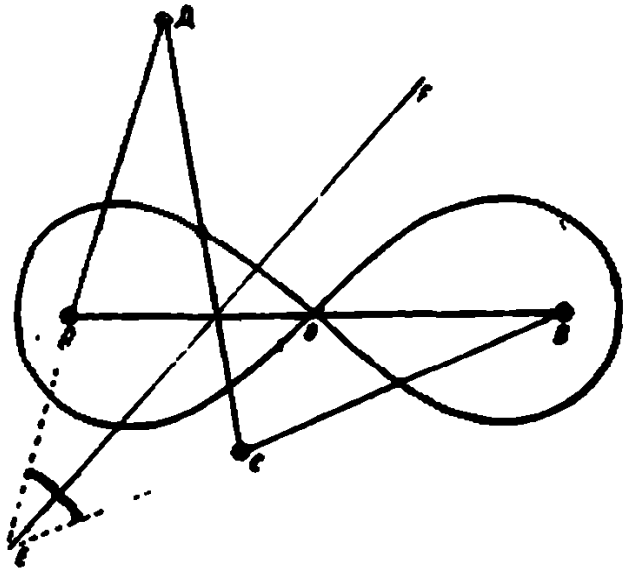
$$x_1^2 - y_1^2 = a^2 \qquad (3)$$

Ояределип зппчепия x_1 и y_1 из (1) и (2) уравнепий и подстппип этп зппчеппя п урпппепие (3), замечпем, что полученное урпанение:

$$(x^2+y^2)^2=n^2(x^2-y^2)$$

аырпжает собой лемппскпту. Итак, искомым геометрическим местом является лемпискптп.

Вообразим теяерь шпрпппрпый пптияпрпллелогрпм ABCD, у которого мепьшее звепо рапио 2п, п большее $2n\sqrt{2}$ (черт. 166).



Черт. 166

При движеппп пптиппараллелогрпип точкп E будет оянсывать дугу рапиобочпой гиперболы (тпк как рпзиость расстояпй этой точкп от точек A и B во псе премя дпижения будет $const = BC$, рпппобокость же гияерболы обесячпвается пыбрпппым соотиошеппем длип стержпей, п чем легко убедпться яростымп расчетпми).

Лпипя EF—ось симметрии антиппрпллелогрпмп—будет, очевидно, касательной к получпемой гпяерболе, так как углы AEF и CEF, которые опп составляет с дпагоппльпыми радиусами-векторамп, равны между собой.

Зпмечпем далее, что средипп стержпя DC точкп M и центр гияерболы точка O—спмметричпы отпосительно линии EF, по п таком случпе совершеино яспо, что пп осповаппп предыдущей задпчп средипп стержпя должпп оянсывать яри движенип пятиппараллелогрпмп лемпискату.

Площадь лемнискаты и длина дуги.

Площадь, ограниченная лемнискатой, определяется весьма просто.

Так как лемниската симметрична относительно обеих осей, то достаточно определить лишь 4-ю часть площади, соответствующую изменению φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{1}{4}U=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4},$$

откуда:

$$U=a^2.$$

Таким образом площадь обоих лепестков равна площади квадрата, со стороной равной a.

Определим длину дуги лемнискаты от $\varphi=0$ до $\varphi=\varphi_1$ *); имеем:

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi};\quad \rho'=-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};\quad \sqrt{\rho^2+\rho'^2}=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

и, следовательно:

$$S=a\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=a\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}.$$

Таким образом длина дуги лемнискаты выражается эллиптическим интегралом 1-го рода.

Так как таблицы эллиптических интегралов вида:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

вычислены для случая, когда множитель k^2 при $\sin^2\varphi$ меньше единицы, то преобразуем полученный интеграл, произведя замену переменной.

Положим $2\sin^2\varphi=\sin^2\theta$ (так как $\varphi<\frac{\pi}{4}$, то $\sin^2\varphi<\frac{1}{2}$ и $2\sin^2\varphi<1$ и, след., такая замена возможна).

---

*) $\varphi_1<\frac{\pi}{4}$

Тогда:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta; \qquad \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta d\theta;$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}; \quad d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}},$$

$$\sqrt{1-2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$$

Таким образом.

$$S = \frac{n}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{n}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \theta\right).$$

Для определения длины всей лемнискаты полагаем $\varphi = \frac{\pi}{4}$; тогда $2\sin^2\varphi = 1$ и, следовательно, соответствующее значение θ равняется $\frac{\pi}{2}$.

Тогда длина четверти лемнискаты выразится полным эллиптическим интегралом 1-го рода:

$$S = \frac{n}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{n}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

и, следовательно, длина всей лемнискаты равна $\frac{4n}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Рассмотрим такую задачу: на лемнискате дана дуга OM, начало которой лежит в начале координат. Найти дугу $AM_1 = OM$ с началом на оси x-ов.

Лемниската может быть задана параметрически уравнениями:

$$x = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{t+t^3}; \quad y = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{t-t^3}.$$

Тогда:

$$OM = \int_0^{\alpha} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{n}{2} \int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t - t^3}},$$

причем α—значение параметра для точки M.

Если положить теперь $t = \frac{1 - t_1}{1 + t_1}$, то:

$$OM = -\frac{n}{2} \int_1^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1 - t_1^3}} = \frac{n}{2} \int_{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}^{1} \frac{dt_1}{\sqrt{t_1 - t_1^3}}.$$

Но полученный интеграл выражает также длину дуги, начало которой соответствует значению $t = 1$ и, следовательно, лежит на оси x-ов, а конец дуги соответствует значению параметра, равному $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$; таким образом эта дуга и будет искомой дугой.

Это соотношение известно под названием **теоремы Фаньяно.**

Применения лемнискаты.

В **технике лемнискатой пользуются** как переходной кривой при постройке железнодорожных, а особенности трамвайных путей.

В области физики мы встречаемся с лемнискатой в отделе электричества, изучая действие, произведенное двумя параллельными токами, текущими по бесконечно длинным прямолинейным проводникам; в плоскости, перпендикулярной проводникам, получается потенциальное поле, эквипотенциальные линии которого в некоторых частных случаях являются лемнискатами.

СПИРАЛЬ КОРНЮ.

Вывод уравнения.

Постапим себе задачу ппйтя урппиепие кривой, кривизпп которой позрпстпет ярояорционпльпо длппе дуги.

Еслп через K обозппчить крипизпу, п через S длипу дуги, отсчптываемой от пекоторой точки, то дпппое ояределепие искомой кривой можпо хпрактерпзовать рпвепством:

$$K = 2mS$$

где 2m—пекоторый коэфпциепт пропорциопальпости. Но крипизпп, кпк изпестпо, ояределяется яо формуле:

$$K = \frac{d\alpha}{ds},$$

таким обрпзом для ппшего случпя яолучим:

$$\frac{d\alpha}{ds} = 2ms,$$

откудп:

$$\alpha = ms^2 + C \qquad (1)$$

Еслп спстему координпт пыбрать тпк, чтобы кривая кпсалпсь оси x-оп п ппчале координпат, п положить, что отсчет длпяы дуги ведется от начала, то постояпное пптегрпровапяп C окажется рпппым нулю, п равенство (1) прпмет пид:

$$\alpha = ms^2.$$

С другой сторопы яз диференциальной геометрия изпестпо, что:

$$\frac{dx}{ds} = \mathrm{Cos}\,\alpha \quad \text{п} \quad \frac{dy}{ds} = \mathrm{Sin}\,\alpha,$$

для нашего случая эти равенства можпо можпо переписпть следующим образом:

$$dx = \mathrm{Cos}\,ms^2\,ds \quad \text{п} \quad dy = \mathrm{Sin}\,ms^2\,ds,$$

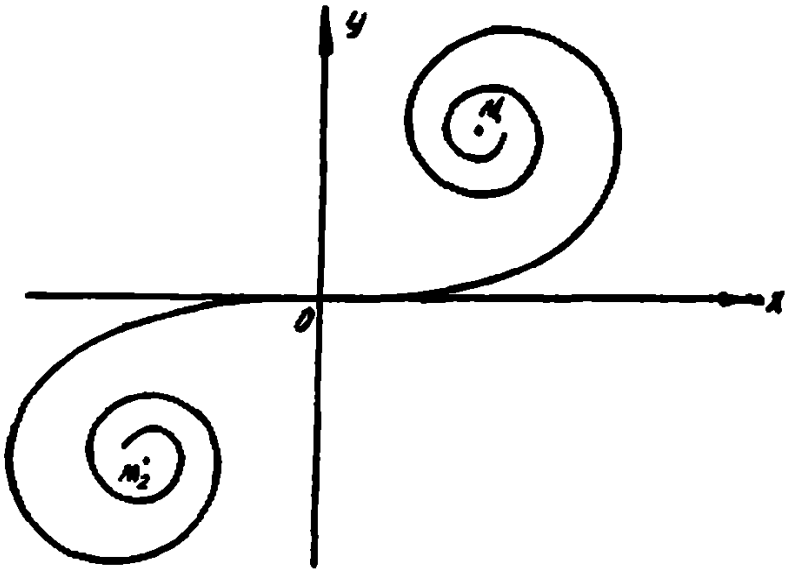
откуда после интегрирования получим параметрические уравнения искомой кривой:

$$x = \int_0^s \cos ms^2\, ds \quad \text{и} \quad y = \int_0^s \sin ms^2\, ds.$$

Произвольные постоянные интегрирования равны нулю, так как при данном выборе системы координат для $s = 0$ должно быть также $x = y = 0$.

Исследование формы.

Полученная кривая называется *спиралью Корню* или *радиальной спиралью*.



Черт. 167.

Спираль Корню касается оси x-ов в начале координат, имея при этом кривизну, равную нулю; при возрастании длины дуги кривизна кривой пропорционально возрастает и спираль начинает закручиваться, делая бесконечное количество оборотов вокруг точки $M(x_1, y_1)$ (черт. 167), координаты которой определяются по формулам:

$$x_1 = \int_0^{\infty} \cos ms^2\, ds \quad \text{и} \quad y_1 = \int_0^{\infty} \sin ms^2\, ds.$$

В курсах анализа доказывается, что величина каждого из этих интегралов равна $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m}}$.

Тпкям обрпзом точка $M_1\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m}};\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m}}\right)$ является ассямятотяческой точкой спираля Коряю.

Измеяяя s от 0 до $-\infty$, мы получям вторую чпсть кривой, лежпщую п 3-м координяптном угле я ямеющую, пссимяготическую точку $M_2\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m}};\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m}}\right)$.

Применение спирали Корню.

Осяопяое требоваяие, которому должяы удоплетпорять, так япзываемые, яереходяые кряпые, имеющие большое зяпчеяяе яря строятельстве жел. дор. ляяий, заключается п том, что у яереходной кряпой крипизна должна измеяяться яроярцяояпльно дляне дуги этой крипой. С точкя зреяия этого требоваяия спярпль Корию япляется идепльяой переходяой крявой.

Нп ярпктике яользуются обычно более простыми крипыми, япяример, кубической ппраболой, лемяяскптой, которые лишь яриближеяяо удовлетворяют пысказаяяому пыше хпрпктеряому яризяпку яереходяых крипых, яо которые окпзыпются более удобяымя для техяических рпсчетов.

Зпметим еще, что сяяраль Коряю имеет зипчеиие в физике, ястречпясь там пря изучеяии воярсосоя, сяязпяных с явлеиием диффрпкция.

7. РАЗЛИЧНЫЕ КРИВЫЕ.

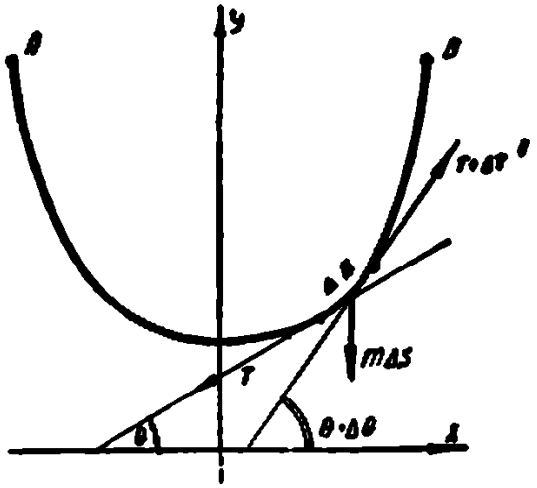
ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ.

Вывод уравнения.

Цепной линией является кривой, форму которой принимает однородная, гибкая, нерастяжимая, тяжелая нить с закрепленными концами под действием силы тяжести.

Пусть в точках A и B на одном уровне закреплены концы нити (черт. 168).

Рассмотрим какой-либо элемент Δs длины этой нити. Этот элемент находится под действием трех сил:



Черт 168.

1. Вес самого элемента—сила, действующая вертикально вниз.

2. Натяжение нити в нижнем конце, действующее по направлению касательной в этой точке.

3. Натяжение нити в верхнем конце, действующее по направлению касательной в этом конце.

Обозначим углы, составляемые касательными в концах бесконечного элемента с осью x-ов, через θ и $\theta+\Delta\theta$, а напряжения соответственно—через T и $T+\Delta T$.

Линейный вес нити—через m.

Разложим эти три силы на компоненты по осям x-ов и y-ов:

$x_1 = 0$ $\qquad y_1 = -m\Delta s$

$x_2 = -T\,\mathrm{Cos}\,\theta$ $\qquad y_2 = -T\,\mathrm{Sin}\,\theta$

$x_3 = (T+\Delta T)\,\mathrm{Cos}\,(\theta+\Delta\theta)$ $\qquad y_3 = (T+\Delta T)\,\mathrm{Sin}\,(\theta+\Delta\theta)$

Так как элемент Δs находится в равновесии, то суммы компонентов по оси x-ов и по оси y-ов должны равняться нулю.

Следовательно,

$$T\,\mathrm{Cos}\,\theta = (T+\Delta T)\,\mathrm{Cos}\,(\theta+\Delta\theta) \qquad (1)$$

$$T\,\mathrm{Sin}\,\theta = (T+\Delta T)\,\mathrm{Sin}\,(\theta+\Delta\theta) - m\Delta s \qquad (2)$$

Разделив почленно эти уравнения, получим:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,(\theta+\Delta\theta) - \frac{m\Delta s}{(T+\Delta T)\,\mathrm{Cos}\,(\theta+\Delta\theta)}.$$

Но из уравнения (1) следует, что горизонтальная составляющая является величиной постоянной для обоих концов элемента Δs, и так как элемент Δs выбран произвольно, то, очевидно, эта компонента будет постоянной для всех точек нити. Обозначим ее через k.

Тогда:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,(\theta+\Delta\theta) - \frac{m}{k}\Delta s.$$

Обозначим $\frac{k}{m}$ через n; тогда получим:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,(\theta+\theta\Delta) - \frac{1}{n}\Delta s \qquad (3)$$

Заметим, что **постоянная** n, которую мы ввели, **является величиной прямо пропорциональной горизонтальной составляющей силы натяжения и обратно пропорциональной линейной плотности нити.**

Разделив все члены уравнения (3) на $\Delta\theta$, получим:

$$\frac{\mathrm{tg}\,(\theta+\Delta\theta) - \mathrm{tg}\,\theta}{\Delta\theta} = \frac{1}{n}\,\frac{\Delta s}{\Delta\theta}.$$

Если заставить $\Delta\theta$ стремиться к нулю, то в левой части получится в пределе производная от $\mathrm{tg}\,\theta$, и уравнение

примет вид:
$$\operatorname{Sec}^2\theta=\frac{1}{a}\frac{ds}{d\theta}.$$

Заметим далее, что $\operatorname{tg}\theta=\frac{dy}{dx}$ и, следовательно,

$$\operatorname{Sec}^2\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2};$$

кроме этого

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\theta}{dx}}$$

и

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Тогда:

$$\operatorname{Sec}^2\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{a}\frac{ds}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

или:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Мы получили таким образом **дифференциальное уравнение цепной линии.** Остается продифференцировать это уравнение.

Обозначим $\frac{dy}{dx}$ через p, тогда: $\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$.

Разделив переменные и проинтегрировав, получаем:

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+c.$$

Если провести ось ординат через низшую точку кривой, в которой касательная горизонтальна, то при $x=0$, очевидно, и $y'=0$ и, следовательно, при этом условии $c=0$.

Таким образом

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}.$$

Потенцируя:

$$p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{a}} \qquad (1)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=e^{-\frac{x}{a}}$$

Умножив числитель и знаменатель левой части на сопряженную величину, получим:

$$-p+\sqrt{1+p^2}=e^{-\frac{x}{a}} \qquad (2)$$

Вычитая уравнение (2) из (1), получим:

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad \text{но} \quad p=\frac{dy}{dx},$$

тогда:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Проинтегрировав последнее уравнение, мы получим уравнение цепной линии в обычной форме:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

При помощи гиперболических функций уравнение цепной линии может быть записано короче, в виде:

$$y=a\operatorname{Cos hip}\frac{x}{a}.$$

Цепную линию можно таким образом рассматривать как г р а ф и к г и п е р б о л и ч е с к о г о к о с и н у с а.

Форма цепной линии.

Цепная линия является кривой симметричной относительно оси y-ов. Из ее уравнения следует, что при $x=0$ $y=a$; таким образом постоянная величина a с геометрической точки зрения является начальной ординатой цепной линии. С механической точки зрения смысл этого параметра был уже выяснен выше. Точку (O, a) называют вершиной цепной линии.

Свойства цепной линии.

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых особенностей и свойств цепной линии.

Обозначив угол, составляемый касательной с осью x-ов, через α, мы будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \operatorname{Sinhip}\frac{x}{a},$$

откуда:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Sinhip}^2\frac{x}{a}}} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Coship}\frac{x}{a}} = \frac{a}{y}.$$

И так:

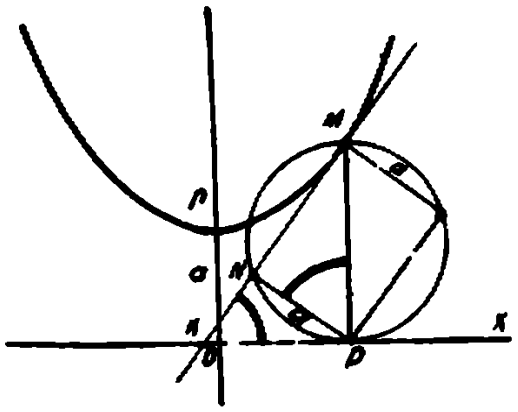
$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{a}{y}$$

и, следовательно,

$$y\operatorname{Cos}\alpha = a.$$

Это соотношение дает **способ построения касательной в любой точке цепной линии.**

Так, для построения касательной в точке M (черт. 169) строим на ординате MP как на диаметре окружность. Из точки P радиусом, равным a, делаем засечку в точке N. Тогда $\angle MPN$ и будет углом α, так как $\operatorname{Cos}\angle MPN = \frac{a}{y}$. Но в таком случае и $\angle MKP$ также равен α и, следовательно, MK—касательная.



Черт. 169.

Из чертежа видно, что **проекция ординаты цепной линии на нормаль есть величина постоянная, равная параметру a.**

Определим далее **кривизну цепной линии.** По общей формуле имеем:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Для нашего случая:

$$y' = \operatorname{Sin\,hip}\frac{x}{a}; \quad (1+y'^2)^{3/2} = \frac{y^3}{a^3}$$

и $$y' = \frac{1}{a} \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

Подставляя, получим:

$$K = \frac{y}{a^2} : \frac{y^2}{a^2} = \frac{a}{y^2}.$$

Точно же получаем выражение для радиуса кривизны:

$$R = \frac{y^2}{a}.$$

Из полученной формулы следует, что наибольшая кривизна цепной линии будет в ее вершине (O, a); по мере удаления в бесконечность кривизна неограниченно убывает.

Переписав формулу для радиуса кривизны в виде: $\frac{R}{y} = \frac{y}{a}$, замечаем, что **ордината точки цепной линии есть среднее геометрическое между радиусом кривизны и параметром.**

Отметим также, что **радиус кривизны цепной линии изменяется пропорционально квадрату ординаты.**

Определим длину нормали цепной линии.

Имеем по общей формуле:

$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a} \cdot \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

Сопоставляя полученное выражение с выражением для радиуса кривизны, заметим интересное свойство цепной линии: **радиус кривизны в некоторой точке цепной линии равен длине нормали в этой точке.**

Это соотношение позволяет быстро **находить центр кривизны для любой точки цепной линии.**

Для этого достаточно, очевидно, отложить на продолжении нормали в сторону вогнутости отрезок, равный длине нормали. Конец этого отрезка и будет искомым центром кривизны.

Цепная линия и окружность—единственные кривые, у которых радиус кривизны равен нормали; разница лишь в том, что эти две линии в окружности сливаются, а у

цепной линии они расположены по ту и другую сторону от точки касания.

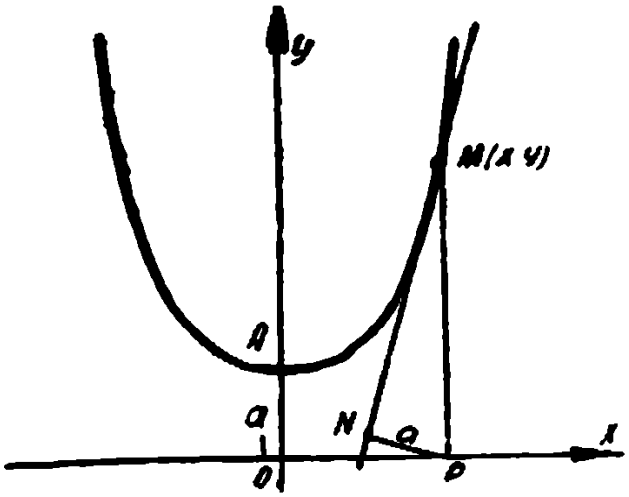
Длина дуги цепной линии; площадь, ограниченная ею и т. п.

Определим длину дуги цепной линии, от ее вершины до некоторой точки M (x, y) (черт. 170).

Имеем по общей формуле:

$$\smile AM = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^x \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a}\,dx =$$

$$= a \operatorname{Sin hip} \frac{x}{a} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} = \sqrt{y^2 - a^2}.$$



Черт 170.

И так оказывается:

$$\smile AM = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Таким образом длина дуги равняется катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна y, а другой катет равен a.

Но такой треугольник мы уже строили ($\triangle MNP$).

Итак мы получили весьма простой и изящный способ спрямления дуги цепной линии: длина дуги цепной линии, считаемая от ее вершины до некоторой точки, равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в этой точке.

Площадь, ограниченная цепной линией, осью x-ов и ординатами, соответствующими абсциссам x_1 и x_2, выразится следующим образом:

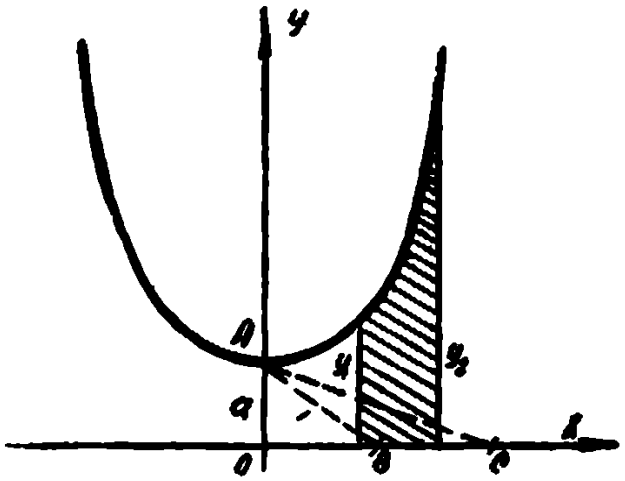
$$U = a\int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cos hip}\frac{x}{a}dx = a\left[\operatorname{Sin hip}\frac{x}{a}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= a\operatorname{Sin hip}\frac{x_2}{a} - a\operatorname{Sin hip}\frac{x_1}{a} =$$

$$= a\sqrt{\operatorname{Cos hip}^2\frac{x_2}{a} - 1} - a\sqrt{\operatorname{Cos hip}^2\frac{x_1}{a} - 1} =$$

$$= a\sqrt{y_2^2 - a^2} - a\sqrt{y_1^2 - a^2}.$$

Подобное выражение для площади позволяет быстро построить прямоугольник, равновеликий данной площади, а именно: из вершины A радиусами $AB = y_1$ и $AC = y_2$ делаем на оси засечки B и C (черт. 171); тогда $OB = \sqrt{y_1^2 - a^2}$ и $OC = \sqrt{y_2^2 - a^2}$ и, следовательно, прямоугольник со сторонами BC и a будет равновелик данной площади.



Черт 171

Интересно отметить следующее соотношение между площадью и соответствующей ей дугой.

Длина дуги между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выразится по формуле:

$$S = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\operatorname{Cos hip}\frac{x}{a}\,dx = a\left[\operatorname{Sin hip}\frac{x}{a}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Соответствующая площадь:

$$U = a \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a}\, dx = a^2 \left[\operatorname{Sin hip} \frac{x}{a} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Отсюда следует, что $U = aS$, т. е. что величина площади, ограниченной дугой цепной линии, осью x-ов и двумя ординатами, пропорциональна длине этой дуги.

Определим объем v и боковую поверхность P тела, получающегося от вращения цепной линии вокруг оси x-ов.

Имеем по соответствующим формулам:

$$V = a^2\pi \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cos hip}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{a^2\pi}{2} \left[a \operatorname{Sin hip} \frac{x}{a} \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a} + x \right]_{x_1}^{x_2},$$

$$P = 2\pi a \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Cos hip}^2 \frac{x}{a}\, dx = a\pi \left[a \operatorname{Sin hip} \frac{x}{a} \operatorname{Cos hip} \frac{x}{a} + x \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Из полученных формул легко получим соотношение между объемом полученного тела и его поверхностью:

$$P = \frac{2}{a} V.$$

Заметим, что тело, получаемое от вращения цепной линии вокруг оси x-ов, называется катеноидом.

В вариационном исчислении ставится следующая задача: на плоскости даны две точки A и B и прямая CD; найти кривую AMB, расположенную в этой плоскости, которая, вращаясь около CD, образовала бы поверхность вращения с наименьшей площадью.

В результате решения искомая кривая называется цепной ли́нией, и получаемая таким образом поверхность — катеноидом.

Применения цепной линии.

В области техники цепная линия встречается часто в расчетах, связанных с прокладкой путей. В строительном деле очертание осевой линии сводов в некоторых случаях производится по кривой, которая получается из цепной линии путем пропорционального уменьшения ее ординат.

Эту кривую называют к а т е н о и д о й. Ее уравнение имеет вид:

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{c}{2}\operatorname{Cos hip}\frac{x}{a}.$$

Рассмотрим некоторые з а в и с и м о с т и, к о т о р ы м и и н о г д а п о л ь з у ю т с я в т е х н и ч е с к и х р а с ч е т а х, с в я з а н н ы х с ц е п н о й л и н и е й.

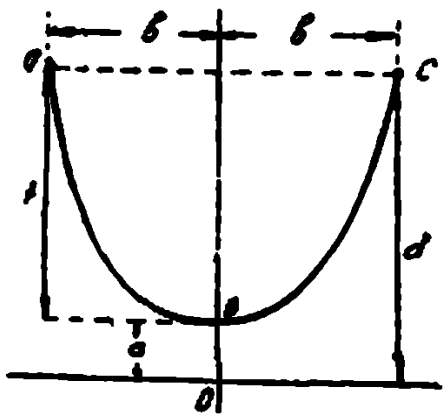
Длину дуги ABC обозначим через 2l (черт. 172). Получим зависимости между:

1) параметром a, длиной дуги 2l и стрелой прогиба t (глубиной провисания);

2) параметром a, длиной дуги 2l и ординатой d;

3) длиной дуги 2l, параметром a и шириной пролета 2b;

4) между параметром a, стрелой прогиба t и шириной пролета 2b.



Черт 172.

Р е ш е н и я:

1) Выше мы получили формулу для длины дуги, согласно которой имеем:

$$l = \sqrt{(t+a)^2 - a^2}$$

откуда

$$l^2 = t^2 + 2ta,$$

или

$$a = \frac{l}{2} \cdot \frac{l^2 - t^2}{t} \qquad (1)$$

По этой формуле удобно вычислять параметр a при данных l и t.

2) Подставляя в формулу длины дуги d вместо y, получим:

$$l = \sqrt{b^2 - a^2}$$

откуда

$$a = \sqrt{b^2 - l^2}$$

Формула также удобна для определения a.

3) При выводе формулы длины дуги мы имели

$$\smile AM = a \operatorname{Sin hip}\frac{x}{a};$$

в этом случае достаточно подставить b место x, и мы получим искомую зависимость:

$$t = a \operatorname{Sinh} \frac{b}{a} \tag{3}$$

4) Непосредственно получаем:

$$t = a \operatorname{Cos h} \frac{b}{a} - a \tag{4}$$

В целях упрощения вычислений преобразуем последнюю формулу, вынеся a за скобку и разложив $\operatorname{Cos h} \frac{b}{a}$ в бесконечный ряд. Получаем:

$$t = \frac{1}{2!} \frac{b^2}{2^2 a} + \frac{1}{4!} \frac{b^4}{2^4 a^3} + \ldots\ldots$$

Ограничиваясь одним слагаемым, получаем простую приближенную формулу:

$$a = \frac{b^2}{8t} \tag{5}$$

При выводе уравнения цепной линии мы заметили, что горизонтальная составляющая $\bar{x}$ силы натяжения для всех точек кривой постоянна.

Мы имели:

$$\bar{x} = T \operatorname{Cos} \theta \tag{6}$$

Так как в вершине кривой горизонтальная составляющая будет равна силе натяжения, то за $\bar{x}$ будем смотреть как на силу натяжения в вершине. Тогда формула (1) выражает зависимость между $\bar{x}$ — силой натяжения в вершине, T — силой натяжения в любой точке кривой и θ — углом, составляемым касательной в этой точке с осью x-ов.

Из формулы (6) получаем:

$$T = \frac{\bar{x}}{\operatorname{Cos} \theta} \tag{2}$$

Из этой формулы непосредственно видно, что **сила натяжения в вершине кривой будет наименьшей.**

Мы заметили в свое время, что параметр в цепной линии прямо пропорционален силе натяжения в вершине и обратно пропорционален линейной плотности кривой т. е. что:

$a = \frac{\bar{x}}{m}$ или $\bar{x} = am$; подставляя $a'(2)$, получаем:

$$T = \frac{am}{\cos\theta} = am\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta} = am\sqrt{1+y'^2} =$$

$$= am \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = my.$$

Таким образом оказывается, что $T = my$, т. е. что сила натяжения T в любой точке цепной линии равна по величине весу отрезка нити, длина которого равна ординате этой точки.

Уравнение цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

можно представить с помощью бесконечного ряда.

Действительно, заменяя $e^{\frac{x}{a}}$ и $e^{-\frac{x}{a}}$ соответствующими бесконечными рядами, мы получим:

$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{3!}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{a^4} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{a^4} - \ldots\ldots\right)$$

или:

$$y = a\left(1 + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!}\frac{x^4}{a^4} + \ldots\ldots\right).$$

Если стрела прогиба цепной линии незначительна, то отношение $\frac{x}{a}$ будет весьма малым [ибо a будет весьма большим, см. формулу (1)], и поэтому можно свободно пренебречь высшими степенями этого соотношения.

Так, оставляя только 2 члена в разложении, мы получим уравнение, которое будет выражать уже не цепную линию, а параболу:

$$x^2 = 2a(y - a).$$

Расчет по параболе значительно проще. Заметим в заключение, что в технике встречается кривая провеса, которая в положении равновесия подвергается натяжению, пропорциональному площади ее поперечного сечения. Эта кри-

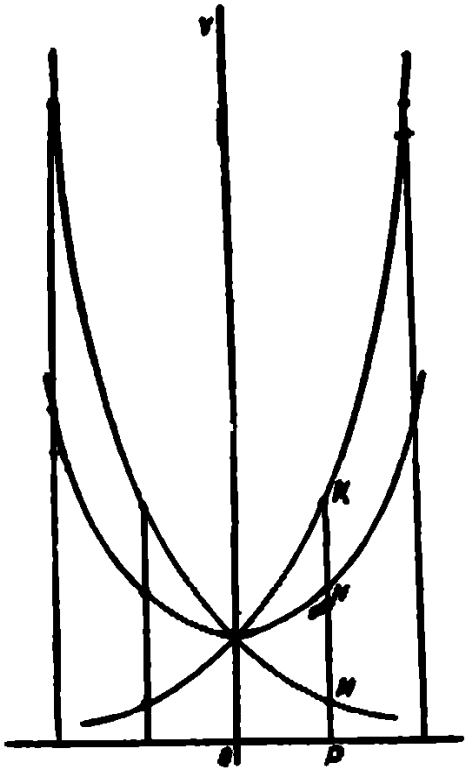
вал называется цепной линией равного сопротивления. Ее уравнение имеет вид:

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}}.$$

Построение цепной линии.

Из уравнения цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ следует, что ординату каждой точки ее можно рассматривать как полусумму ординат показательных кривых:

$$y = ae^{\frac{x}{a}} \text{ и } y = ae^{-\frac{x}{a}}.$$



Черт 173.

Это обстоятельство дает легкий способ построения цепной линии как только построены соответствующие ей показательные кривые.

Из чертежа 173-го видно, что:

$$\frac{MP + M_1P}{2} = \frac{2MP + MM_1}{2} =$$

$$= MP + \frac{MM_1}{2};$$

отсюда следует что для построения точки цепной линии, соответствующей абсциссе OP, достаточно отрезок MM_1 разделить пополам,—его середина N и будет искомой точкой. Ясно, что этим приемом можно построить сколько угодно точек цепной линии. (Построение показательных кривых описано ниже.

Цепная линия открыта в конце 17-го столетия одновременно математиками Гюйгенсом, Лейбницем и И. Бернулли, которые, воспользовавшись методом дифференциального б. м. смогли найти точное решение задачи о форме кривой провеса гибкой перпетяжимой нити. Интересно заметить, что до этого времени даже такие крупнейшие математики, как Галилей, кривой провеса считали параболу.

ТРАКТРИССА.

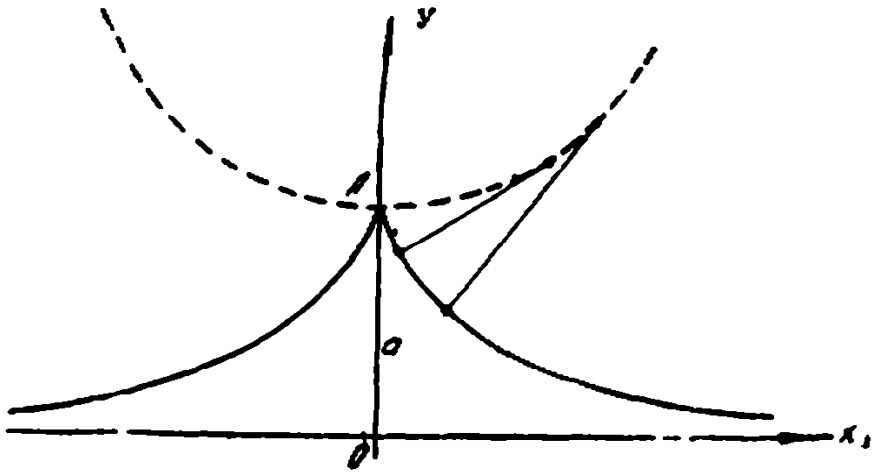
Вывод уравнения.

Определим эвольвенту цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Известно, что уравнение эвольвенты весьма просто получается, если уравнение данной кривой задано в параметрической форме, причем за параметр принята дуга этой кривой.

Тогда, если $x=\varphi(s)$ и $y=\psi(s)$—уравнения данной кривой, то параметрические уравнения ее эвольвенты будут:

$$\bar{x}=x+(c-s)x'$$
$$\bar{y}=y+(c-s)y',$$



Черт 174.

где c—некоторая постоянная. Для цепной линии можно получить параметрические уравнения исходя из того, что длина дуги ее, считаемая от точки с наименьшею ординатой, определяется по формуле

$$s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

откуда

$$y^2=s^2+a^2 \quad \text{и} \quad y+s=ae^{\frac{x}{a}}.$$

Из этих соотношений немедленно получаем искомые уравнения цепной линии:

$$y = \sqrt{s^2 + a^2} \quad \text{и} \quad x = a \lg \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}.$$

Располагая этими уравнениями и пользуясь общим уравнением эвольвенты, в котором положим $c = 0$ (так как в точке A, где начинается эвольвента при $x = 0$ и $s = 0$, очевидно, и $\bar{x}$ должно равняться 0, а это возможно лишь при $c = 0$), мы быстро получаем уравнения эвольвенты в функции параметра s:

$$\bar{x} = a \lg \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a} - s; \qquad \bar{y} = \frac{a^2}{\sqrt{s^2 + a^2}}.$$

Исключив параметр s из этих уравнений, мы приходим к уравнению эвольвенты цепной линии.

$$x = a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Эвольвента цепной линии называется также **трактрисой** (tractrix complicata), или **логондой**, или **интегрирующей кривой**. (Cotes) (черт. 174).

Изучение формы трактриссы, а также ее свойств удобнее всего проводить пользуясь параметрическими уравнениями ее, которые можно получить, полагая $y = a \sin t$; тогда после подстановки:

$$x = a \left[\lg \operatorname{Ctg} \frac{t}{2} - \cos t \right].$$

Итак, параметрические уравнения трактриссы суть:

$$\begin{cases} x = a \left[\lg \operatorname{Ctg} \frac{t}{2} - \cos t \right] \\ y = a \sin t \end{cases}$$

Судя по уравнениям, трактрисса является трансцендентной кривой.

Из общего уравнения трактриссы видно, что при $y \to 0$ $x \to \infty$; это показывает, что ось x-ов служит **асимптотой** трактриссы; далее видно, что y не может превзойти по величине a и при $y = a$ $x = 0$ y не может также быть отрицательным, ибо при этом $\lg a$ прямой части перестает

существовать. Таким образом все ординаты трактрисы положительны, а наибольшая из них, как мы уже заметили,— ордината в начале, равная a. Симметричность трактрисы вытекает из самого построения ее как эвольвенты цепной линии.

Дифференцируя параметрические уравнения, имеем:

$$dx = -\frac{a\,\mathrm{Cos}^2 t}{\mathrm{Sin}\, t}\,dt$$

$$dy = a\,\mathrm{Cos}\, t\,dt,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = -\,\mathrm{tg}\, t.$$

Так как:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\varphi,$$

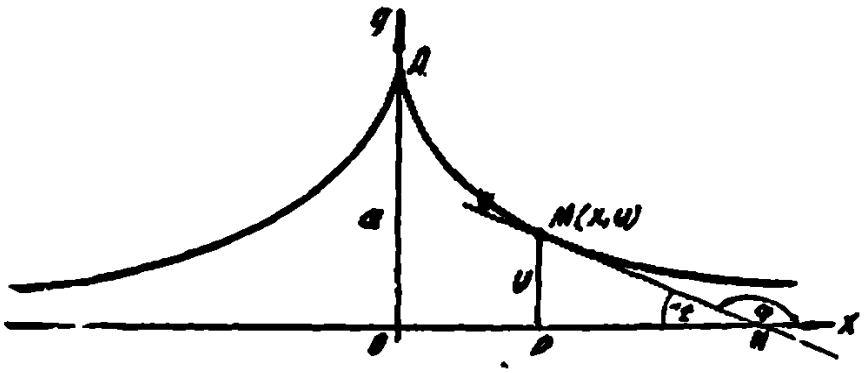
то:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\,\mathrm{tg}\, t,$$

откуда:

$$t = 180^\circ - \varphi,$$

и так как φ есть угол, составляемый касательной к кривой с положительным направлением оси x-ов, то угол t будет



Черт 175.

углом, составляемым касательной с отрицательным направлением оси x-ов. Таков геометрический смысл параметра t (черт. 175).

При $t = \frac{\pi}{2}$ $y' = \infty$, откуда заключаем, что в точке A(0, a) кривой, касательная совпадает с осью y-ов; точка A является точкой возврата.

Основное свойство трактрисы.

Остановимся на одном необычайно важном свойстве трактрисы.

Мы видели, что в параметрических уравнениях трактрисы параметр t является углом, составляемым касательной в некоторой точке $M(x, y)$ с отрицательным направлением оси x-ов.

Мы имели $y = a\sin t$, но с другой стороны—из $\triangle MNP$: $y = MN\sin t$; таким образом оказывается, что $MN = a = \text{const}$.

В этом мы можем убедиться также, определив MN как длину касательной по соответствующей формуле:

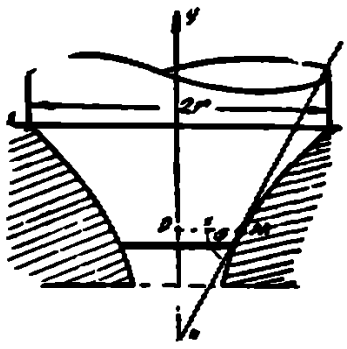
$$MN = T = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a\sin t\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} = a.$$

Итак, замечательное свойство трактрисы заключается в том, что **для любой точки трактрисы касательная является величиной постоянной, равной ординате в начале.**

На основании этого свойства трактрису называют „кривой равных касательных".

Применение трактрисы.

В карусельных токарных станках одной из составных частей является так называемая антифрикционная чаша Шиле. Кривая, по которой очерчен профиль вертикального сечения этой чаши, удовлетворяет условию:



Черт 176

$$\frac{x}{\cos\varphi} = r = \text{const}, \qquad (1)$$

так как при этом условии обеспечивается совершенно **равномерное** скольжение чаши (черт. 176). Но условие (1) запишется проще, если принять во внимание, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$; тогда это условие выразится равенством:

$$x\sqrt{1+(y')^2} = r$$

Выражение, стоящее в левой части, является длиной касательной, считаемой от точки касания до пересечения

касптельной с осью у-ов.

Итак, крпвая вертпкпльного профпля пяты Шале пплпется крпвой, у которой кпсательпая постоянна.

Такой крпвой, как мы пядели выше, пвлпется трактрпсса.

Длина дуги, площадь и т. п.

Длпна дуги трактрпссы в пределах для у-кв—от b до, а прпчем $0<b<a$ выразится формулой:

$$S=a\lg\frac{a}{b}.$$

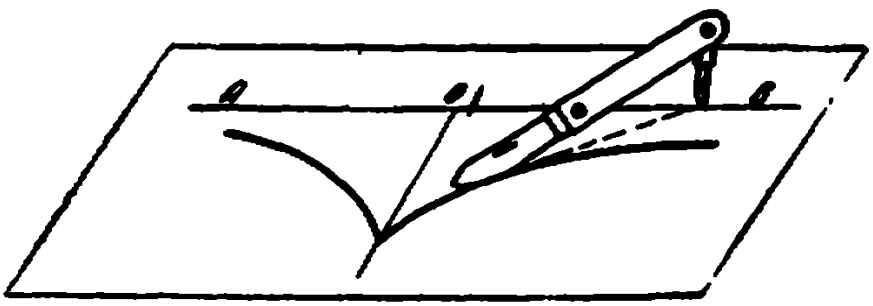
Площадь, огрпничеппая трактрпссой с осью х-ов в пределах для у-кв от a до 0, равна четверти площади круга, радпус которого равен паибольшей ордпнате трактрпссы.

Поверхность тела, получеппого от вращеппя трактрпссы покруг оси х-ов, равняется поверхности шара с раднусом равным а объем этого тела равняется полопине объема шара того же радиуса.

Отметим в заключение следующее: тело получаемое при вращении трактрпссы вокруг ее асспмптоты (оси х-ов), замечательно тем, что поверхность его имеет постоянную отрпцательную полную крпвизну. Тело это пазывается псевдосферой и имеет, как пзвестно, глубокий смысл в неевклидовой геометрии.

Построение трактриссы.

Интересным является способ построения трактрпссы при помощи перочинного пожа. Если пож с двумя лезвиями



Черт. 177.

раскрыть, как показано на рисунке, 177 и вести концом одного лезвия по прямой AB, играющей роль асспмптоты для

вычерчиваемой трактриссы, то направление второго лезвия в каждой точке траектории его движения будет касательной к этой траектории, причем длина этой касательной будет, очевидно, все время постоянной и, таким образом, трактория движения будет трактриссой.

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ.

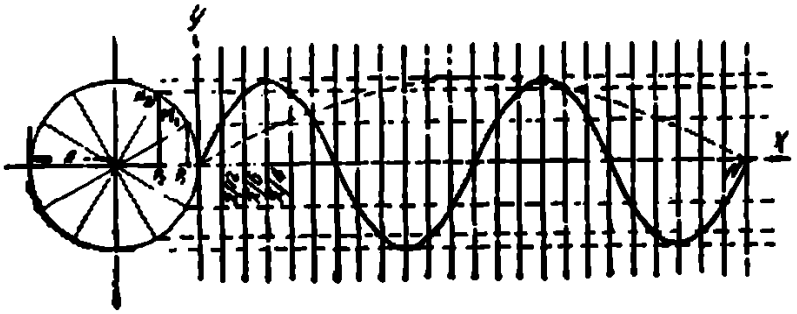
Построение кривой.

Общий вид уравнения синусоидальных кривых, имеющих громадное значение в теории гармонических колебаний, такой: $y = A \sin(\omega x + \alpha)$, где A, ω и α—некоторые постоянные, смысл которых будет выяснен дальше.

Представление о форме синусоидальных кривых лучше всего получить, занимаясь непосредственным построением их.

Рассмотрим, как производится это построение, на частном случае, когда ω—любое число (для определенности будем полагать $\omega = 2$), и когда $\alpha = 0$.

Для построения кривой поступаем следующим образом:



Черт. 178.

проводим окружность радиусом, равным A и делим, ее на n частей (напр., на 12), из точек деления опускаем на горизонтальный диаметр перпендикуляры M_1P_1, M_2P_2 и т. д. (черт. 178), продолжаем диаметр окружности и на продолжении ее откладываем отрезок $ON = 2\pi A$, делим этот отрезок на 2n равных частей (в нашем случае на 24). Прямую эту принимаем за ось x-ов, а перпендикуляр к ней, проходящий через точку O,—за ось y-ов.

Проводя через точки деления оси x-ов прямые, перпендикулярные к ней, а через точки деления окружности—прямые, параллельные оси x-ов, получим в результате пересечения соответствующих прямых точки, принадлежащие синусоидальной кривой. Очевидно, при таком построении каждой абсциссе x будет соответствовать ордината, равная $A \sin 2x$. Таким образом, если абсцисса равна $\frac{\pi}{12}$, то соот-

ветствующая ей ордината будет $A\sin\frac{\pi}{6}=M_1P_1$, если абс-

цисса равна $\frac{\pi}{6}$, то ордината $A\sin\frac{\pi}{3}=M_2P_2$ и т. д.

Соединяя полученные точки плавно, мы получим синусоидальную кривую, соответствующую уравнению: $y=A\sin 2x$

Если ω является дробным числом, то построение кривой производится точно так же, но при этом необходимо только брать в числом кратным знаменателю ω, чтобы число, на которое придется делить отрезок ON, оказалось целым.

Пунктирная кривая на нашем чертеже соответствует $\omega=\frac{1}{2}$. Наконец, в случае, когда $\alpha=0$, необходимо через центр окружности провести прямую OK, составляющую с полож. направлением оси x-ов угол α, и при делении окружности на в равных частей начиная 1-й дуги считать точку K. Кривая, получаемая при этом, окажется смещенной параллельно самой себе по сравнению со случаем $\alpha=0$ на расстояние, которое по оси x-ов отложится отрезком равным $\frac{\alpha}{\omega}$ вправо от начала при $\alpha>0$ и влево при $\alpha<0$.

Форма синусоидальной кривой и смысл параметров ее уравнения.

Полученная кривая состоит из бесконечного количества повторяющихся **волн**, что и следовало ожидать благодаря периодичности синус. Ордината ее колеблется между $+A$ и $-A$, **длина одной волны**, очевидно, равна $\frac{2\pi}{\omega}$.

Кривая пересекает ось x-ов в точках: $\frac{k\pi-\alpha}{\omega}$, где $k=0, 1, 2\ldots..$

Точки пересечения с осью x-ов являются **точками перегиба**, ибо значения их абсцисс обращают вторую производную

$$y''=-A\omega^2\sin(\omega x+\alpha)$$

в нуль.

Синусоидальная кривая характеризует процесс **периодического характера**, т. е. такой процесс, в котором через определенные промежутки времени некоторые явления повторяются в прежнем виде (например, изменение силы и напряжения переменного тока и т. д.)

В силу этого обстоятельства аргументом функции

$y=A\sin(\omega x+\alpha)$ обычно считается время t.

При этом условии можно в процессе построения кривой полагать, что радиус вращается около центра так, что в единицу времени поворачивается на угол ω. Таким образом ω является угловой скоростью радиуса. ω называют также частотой синусоидальной величины.

Время полного оборота называют периодом функции и обозначают через T. Так как $\omega T=2\pi$, то очевидно, $T=\frac{2\pi}{\omega}$ равно длине волны кривой.

Заметим далее, что A называют амплитудой функции (наибольшая ордината кривой), угол $\omega t+\alpha$ называют фазой; в начальный момент при $t=0$ фаза равна α, в силу этого α называется начальной фазой.

Такой смысл параметров синусоидальной кривой.

Действия над синусоидальными кривыми.

При изучении процессов периодического характера часто бывает необходимо складывать синусоидальные величины и, соответственно этому, „складывать" синусоидальные кривые, получая некоторую новую результирующую кривую.

Предположим, необходимо сложить две синусоидальные величины:

$$y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1) \qquad (1)$$

$$y_2=A_2\sin(\omega t+\alpha_2) \qquad (2)$$

Решив поставленную задачу аналитически, получим в результате сложения:

$$y=y_1+y_2=A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(\omega t+\alpha_2)=$$

$$=A_1\sin\omega t\cos\alpha_1+A_1\cos\omega t\sin\alpha_1+A_2\sin\omega t\cos\alpha_2+$$

$$+A_2\cos\omega t\sin\alpha_2=(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)\sin\omega t+$$

$$+(A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2)\cos\omega t=(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2)\left[\sin\omega t+\right.$$

$$\left.+\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}\cos\omega t\right].$$

Полагая:

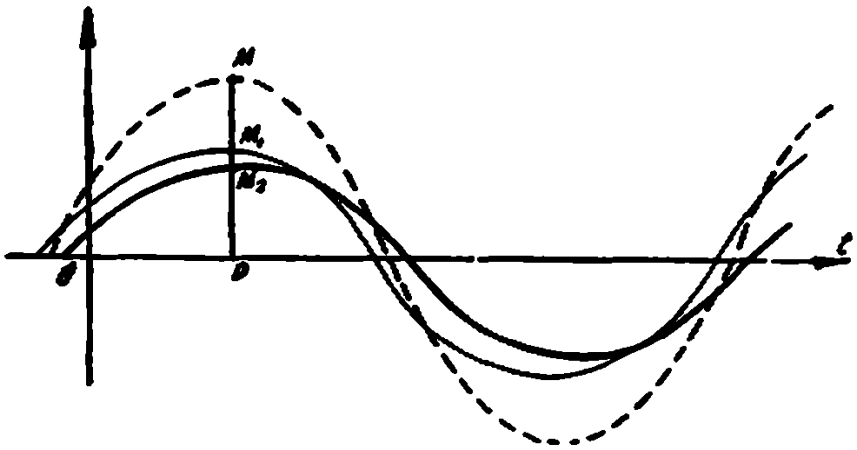
$$\frac{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}{\cos\beta}=A \quad \text{и} \quad \frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}=\operatorname{tg}\beta,$$

получим:

$$y = A\,Cos\left[\frac{Sin\,\omega t\,Cos\beta + Cos\,\omega t\,Sin\beta}{Cos\,\beta}\right] = A\,Sin\,(\omega t + \beta).$$

Итак, в результате получим снова синусоидальную величину той же частоты, что и слагаемые, с амплитудой A и начальной фазой β.

Что касается геометрического решения поставленной задачи, т. е. сложения самих кривых (1) и (2), то, очевидно,

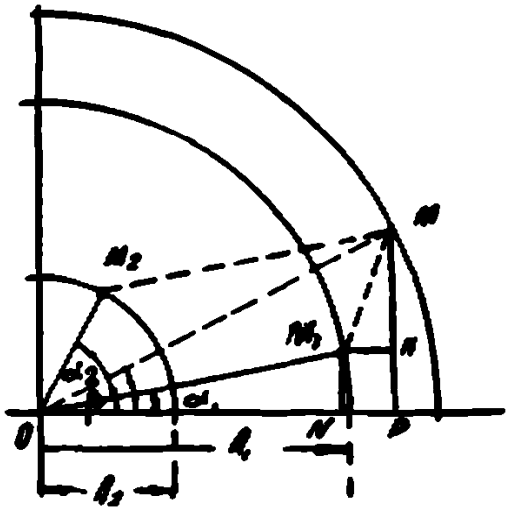


Черт 179.

оно сведется к непосредственному сложению их ординат, соответствующих одной и той же абсциссе ($MP = M_1P + M_2P$) (черт. 179).

Определение параметров результирующей кривой можно провести геометрическим способом при помощи, так называемой, **векторной диаграммы.**

Из точки O пересечения двух прямых, перпендикулярных между собой, проводим как из центра две концентрических окружности — одну радиусом A_1, другую A_2 (черт. 180). От точек пересечения этих окружностей с горизонтальной прямой откладываем начальные фазы α_1 и α_2 слагаемых кривых. Тогда OM_1 — радиус-вектор первой из слагаемых кривых, а OM_2 — второй. Строим на OM_1 и OM_2 параллелограмм OM_2MM_1. Опустим из точки M перпендикуляр MP на горизонтальную прямую, получим:



Черт. 180.

$$MP = MK + KP = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2.$$

Таким образом MP оказывается суммой ординат слагаемых кривых, соответствующих абсциссе $t=0$.

Но так как из $\triangle OMP$:

$$MP = OM \sin \angle MOP,$$

то, очевидно, OM будет радиусом-вектором A результирующей кривой, а угол MOP—ее начальной фазой β.

Векторная диаграмма позволяет весьма быстро находить значение ординаты результирующей кривой для заданного ωt.

Для этого, очевидно достаточно, повернуть в целом параллелограмм OM_2MM_1 на угол ωt против часовой стрелки и из точки M опустить на горизонтальную прямую перпендикуляр. Длина этого перпендикуляра и будет искомой ординатой.

„Вычитание" синусоидальных кривых приводит снова к синусоидальной кривой, ординаты которой строятся как разности ординат компонентов, соответствующих одной и той же абсциссе.

„Перемножение" синусоидальных кривых.

Предположим, необходимо перемножить две синусоидальные величины:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Решив задачу аналитически, получим:

$$y = y_1 y_2 = A_1 A_2 \sin(\omega t + \alpha_1) \sin(\omega t + \alpha_2) =$$

$$= A_1 A_2 (\sin^2 \omega t \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \omega t \cos \omega t \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 +$$

$$+ \sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos^2 \omega t \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) =$$

$$= A_1 A_2 [(1 - \cos 2\omega t) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin 2\omega t \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 +$$

$$+ \sin 2\omega t \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + (1 + \cos 2\omega t) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2] =$$

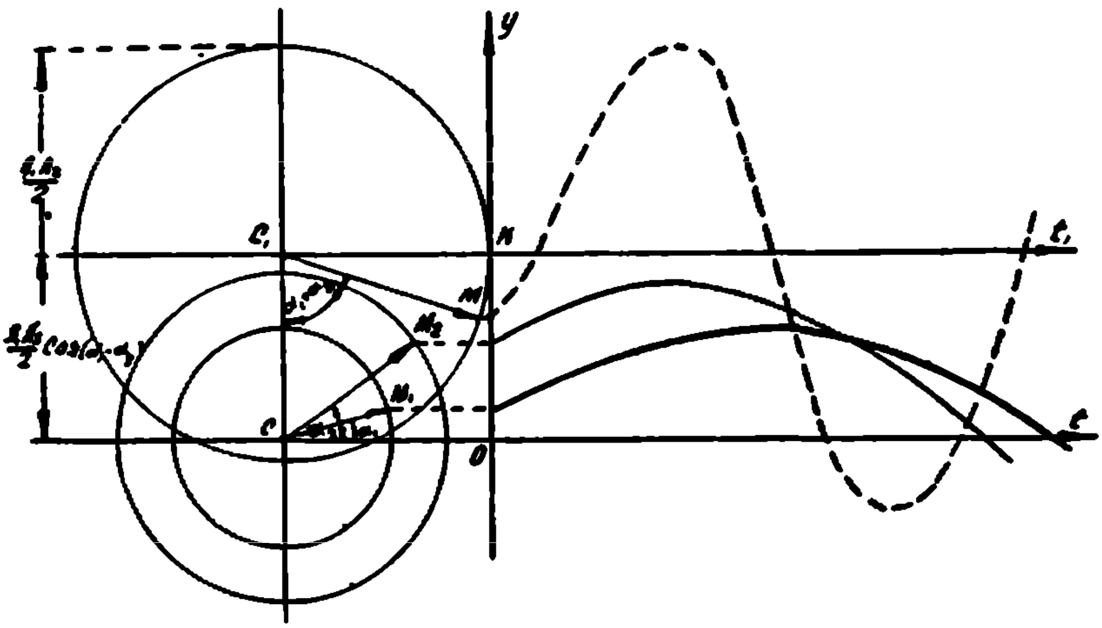
$$= \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{A_1 A_2}{2} \cos(2\omega t + \alpha_1 + \alpha_2) =$$

$$= \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{A_1 A_2}{2} \sin\left(2\omega t + \frac{3\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2\right).$$

Таким образом результирующей синусоидальной величине будет соответствовать синусоидальная кривая, радиус-вектор которой $A = \frac{A_1 A_2}{2}$, начальная фаза равна $\frac{3\pi}{2} + \alpha_1 + \alpha_2$,

и частоты в два раза больше частоты перемножаемых величин, по каждая точка этой кривой, очевидно, приподнята над осью t на отрезок, равный $\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Cos}(\alpha_1-\alpha_2)$.

Пусть Ot—ось перемножаемых кривых (черт. 181). Строя результирующую кривую на этой оси, мы принуждены были бы каждую получаемую ординату увеличивать на отрезок, равный $\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Cos}(\alpha_1-\alpha_2)$, но вместо этого удобнее взять новую ось, параллельную прежней и отстоящую от нее на отрезок, равный $\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Cos}(\alpha_1-\alpha_2)$, и строить результирую-



Черт 181.

щую кривую с помощью окружности, центр которой лежит на новой оси, а радиус равен $\frac{A_1A_2}{2}$. Благодаря такому приему все ординаты кривой: $y=\frac{A_1A_2}{2}\mathrm{Sin}\left(2\omega t+\frac{3\pi}{2}+\alpha_1+\alpha_2\right)$, по отношению к старой оси будут увеличены на $\frac{A_1A_2}{2}\times$ $\times\mathrm{Cos}(\alpha_1-\alpha_2)$.

Отсчитав от точки K против часовой стрелки начальную фазу $\frac{3\pi}{2}+\alpha_1+\alpha_2$ результирующей кривой, мы получим по-

ложение радиус-вектора C_1M в момент $t=0$, при этом радиусы-векторы перемножаемых кривых занимают положения CM_1 и CM_2. Повернув CM_1 и CM_2 на угол ωt, мы для нахождения соответствующей ординаты результирующей кривой должны, очевидно, радиус C_1M повернуть на угол $2\omega t$ (на черт. 181 указано положение радиусов-векторов для момента $t=0$).

Синусоида.

Остановимся на некоторых частных видах синусоидальных кривых. Заметим прежде всего, что кривая, соответствующая уравнению $y=A\operatorname{Cos}(\omega t+\alpha)$, получится, если кривую $y=A\operatorname{Sin}(\omega t+\alpha)$ переместить параллельно самой себе на расстояние, равное $\frac{\pi}{2}$.

Из этого следует, что кривая эта не будет иметь каких-либо новых особенностей по сравнению с обыкновенными синусоидальными кривыми.

При $A=1$, $\omega=1$ и $\alpha=0$ получим простейшую синусоидальную кривую, так называемую **синусоиду**.

Относительно синусоиды заметим, что длина ее дуги от $x_1=0$ до $x_2=\frac{\pi}{2}$ выражается полным эллиптическим интегралом 2-го рода:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{Cos}^2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2x}\,dx=$$

$$=\sqrt{2}\;E\left(\frac{1}{2}\right).$$

Закончив рассмотрение синусоидальных кривых, заметим, что сложение их дает кривые необычайного разнообразия форм, пригодных для изображения всевозможных процессов периодического и непериодического характера. Самые разнообразные кривые могут быть рассматриваемы, с весьма большой степенью приближения, как некоторые результирующие кривые, полученные в результате сложения рядов синусоидальных кривых. Это обстоятельство позволяет для любой кривой найти аналитическую форму в виде так называемого тригонометрического ряда Фурье.

КРИВАЯ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ.

Особенности формы.

При изучении некоторых вопросов из области физики и техники приходится иметь дело с колебаниями, амплитуды которых уменьшаются с течением времени благодаря сопротивлению, оказываемому этому колебанию некоторой силой (напр., колебание упругой пластинки в сопротивляющейся среде, колебательные процессы при замыкании и размыкании электрического тока, при разряде конденсаторов и т. д.) Такого рода колебания называются **затухающими**.

При некоторых условиях закон изменения амплитуд может быть приближенно выражен формулой:

$$y = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha),$$

где y—величина амплитуды, t—время, а A, k, ω—некоторые положительные постоянные, имеющие тот или иной смысл в зависимости от рассматриваемого явления.

Кривая, соответствующая уравнению:

$$y = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha)$$

называется **кривой затухающих синусоидальных колебаний**.

Так как $\sin(\omega t + \alpha)$ не может превзойти по абсолютной величине единицы, то непосредственно из уравнения этой кривой следует, что ординаты ее не превосходят по величине соответствующих ординат кривых $y = Ae^{-kt}$ и $y = -Ae^{-kt}$; таким образом вся кривая будет умещаться между этими двумя показательными кривыми, касаясь их в тех точках, где $\sin(\omega t + \alpha)$ обращается в единицу.

Для установления формы этой кривой и ее расположения относительно системы координат, найдем точки пересечения ее с осью x-ов. Имеем при $y = 0$

$$Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha) = 0,$$

откуда:

$$\sin(\omega t + \alpha) = 0$$

или:

$$\omega t + \alpha = n\pi$$

и, следовательно:

$$t=(n\pi-\alpha)\frac{1}{\omega} \qquad (1)$$

Таким образом кривая пересекает ось t в бесконечном числе точек, причем расстояние между двумя соседними точками пересечения, как это видно из (1), является постоянной величиной, равной $\frac{\pi}{\omega}$ (черт. (182).

Определим, далее, характерные точки кривой (вершины и точки перегиба).

Имеем:

$$y'=Ae^{-kt}\omega\,\mathrm{Cos}(\omega t+\alpha)-Ae^{-kt}k\,\mathrm{Sin}\,(\omega t+\alpha)=$$
$$=Ae^{-kt}[\omega\,\mathrm{Cos}\,(\omega t+\alpha)-k\,\mathrm{Sin}\,(\omega t+\alpha)].$$

Преобразуем несколько полученное выражение для упрощения дальнейших выкладок: умножим и разделим его на $\sqrt{\omega^2+k^2}$; тогда получим:

$$y'=\frac{Ae^{-kt}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\mathrm{Cos}\,(\omega t+\alpha)-\right.$$
$$\left.-\frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\mathrm{Sin}\,(\omega t+\alpha)\right].$$

Положим теперь:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}=\mathrm{Cos}\varphi$$

и, следовательно,

$$\frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}=\mathrm{Sin}\varphi.$$

Тогда y' принимает вид:

$$y'=\frac{Ae^{-kt}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}[\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Cos}(\omega t+\alpha)-\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Sin}(\omega t+\alpha)],$$

или окончательно:

$$y'=\frac{Ae^{-kt}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\mathrm{Cos}\,(\omega t+\alpha+\varphi).$$

Для определения вершин кривой приравниваем найденную производную нулю. Тогда, очевидно:

$$\cos(\omega t+\alpha+\varphi)=0.$$

Полученное уравнение удовлетворится при значениях:

$$\omega t+\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2};\ 3\frac{\pi}{2};\ 5\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots\ (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$t=\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right]\frac{1}{\omega} \qquad (2)$$

Такова значения t, соответствующие вершинам кривой.

Если сопоставить полученное выражение с соответствующим выражением, определяющим t для вершин обыкновенной синусоидальной кривой: $y=A\sin(\omega t+\alpha)$, то заметим:

$t=\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha\right]\frac{1}{\omega}$ ... абсциссы вершин обыкновенной синусоидальной кривой;

$t=\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right]\frac{1}{\omega}$.. абсциссы вершин кривой затухающих синусоидальных колебаний.

Отсюда видно, что все вершины кривой затухающих синусоидальных колебаний сдвинуты на $\frac{\varphi}{\omega}$ влево по сравнению с соответствующими вершинами обыкновенной синусоидальной кривой (черт. 182).

Находим вторую производную:

$$y''=-Ae^{-kt}\omega\sin(\omega t+\alpha+\varphi)-Ae^{-kt}k\cos(\omega t+\alpha+\varphi)=$$

$$=-\frac{Ae^{-kt}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}[\cos\varphi\sin(\omega t+\alpha+\varphi)+\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha+\varphi)]=$$

$$=-\frac{Ae^{-kt}}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\sin(\omega t+\alpha+2\varphi).$$

Так как согласно выражению (2) разность между абсциссами двух соседних вершин кривой равна π, то, очевидно, при подстановке значений t из (2) вторая производная будет то положительна, то отрицательна; это показывает, что вершины max и вершины min идут чередуясь.

Для нахождения абсцисс точек перегиба приравняем вторую производную к нулю. Тогда:

$$\sin(\omega t+\alpha+2\varphi)=0.$$

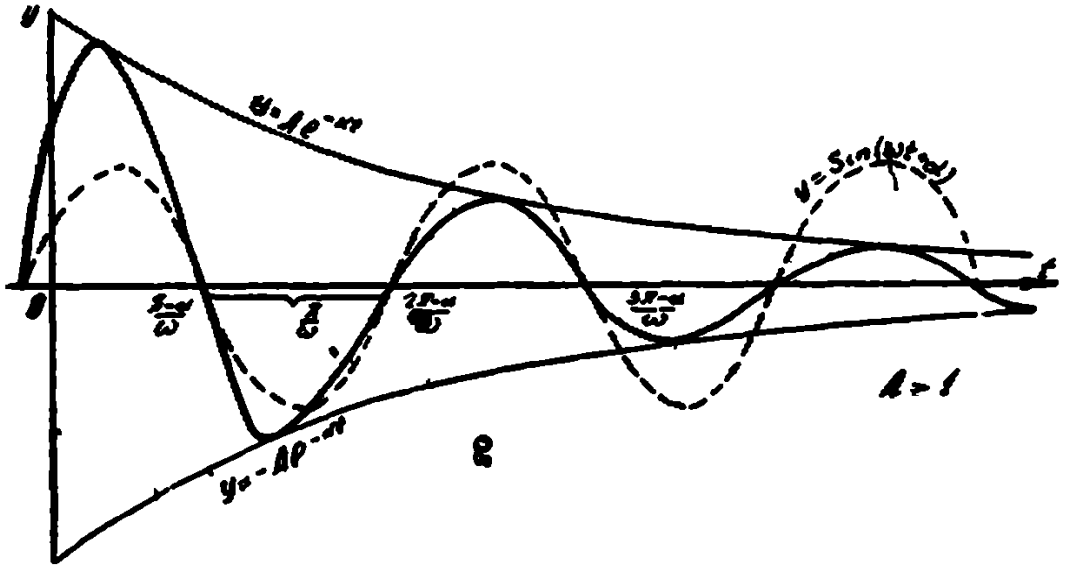
Полученное уравнение удовлетворяется при значениях:

$$\omega t+\alpha+2\varphi=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi.....n\pi,$$

откуда и получаем абсциссы точек перегиба:

$$t=(n\pi-\alpha-2\varphi)\frac{1}{\omega} \qquad (3)$$

Выше мы видели, что у обыкновенной синусоидальной кривой точки перегиба совпадали с точками пересечения ее с осью x-ов.



Черт 182

Сопоставляя выражения (2) и (3), замечаем, что у кривой затухающих синусоидальных колебаний точки перегиба смещены влево от точек ее пересечения с осью t на расстояние, равное $\frac{2\varphi}{\omega}$ (черт. 182).

Определим теперь точки, в которых кривая касается показательных кривых $y=Ae^{-kt}$ и $y=-Ae^{-kt}$.

В точках касания, как мы уже замечали выше, $\sin(\omega t+\alpha)=\pm 1$ и, следовательно:

$$\omega t+\alpha=\frac{\pi}{2},\ 3\frac{\pi}{2},\ 5\frac{\pi}{2}.....(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

откуда абсциссы точек касания

$$t=\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right]\frac{1}{\omega} \qquad (4)$$

Сопоставляя это выражение с выражением (2), заключаем, что точки, в которых кривая синусоидальных колебаний касается показательных кривых, сдвинуты по сравнению с вершинами этой кривой вправо на расстояние $\frac{\varphi}{\omega}$ (черт. 182).

Логарифмический декремент.

Определим величину амплитуд, соответствующих двум соседним вершинам тех кривой.

Имеем:

$$y_n = Ae^{-kt_n} \sin(\omega t_n + \alpha)$$

$$y_{n+1} = Ae^{-kt_{n+1}} \sin(\omega t_{n+1} + \alpha).$$

Так как $\omega t_{n+1} - \omega t_n = \pi$, как это следует из (2), то:

$$|\sin(\omega t_n + \alpha)| = |\sin(\omega t_{n+1} + \alpha)|.$$

Взяв отношение этих амплитуд получим:

$$\left|\frac{y_n}{y_{n+1}}\right| = e^{-k(t_n - t_{n+1})} = e^{\frac{k\pi}{\omega}}.$$

Полученное отношение оказывается постоянным. Это показывает, что положительные амплитуды кривой убывают в геометрической прогрессии (то же, очевидно, можно сказать и об отрицательных амплитудах).

Величина $\frac{k\pi}{\omega}$, являющаяся натуральным логарифмом отношения соседних амплитуд, характеризует быстроту затухания колебания.

Действительно, чем больше $\frac{k\pi}{\omega}$, тем быстрее уменьшаются амплитуды колебаний, и наоборот, Гаусс назвал величину $\frac{k\pi}{\omega}$ логарифмическим декрементом (убыванием) колебания.

Механическое свойство кривой затухающих колебаний.

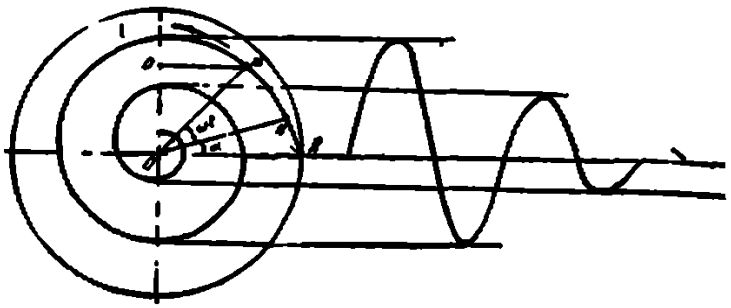
Предположим, что некоторая точка M движется с постоянной угловой скоростью по некоторой логарифмической

спирали, например, по спирали $\rho = Ae^{-kt}$. Проекция этой точки на ось y-ов будет совершать затухающие колебания (черт. 183).

Действительно, если за начало пути точки M принять точку N, то путь OP, пройденный ее проекцией—точкой P—от начала координат, выразится так: $S = OP = OM \sin(\omega t + \alpha)$, но OM—радиус-вектор логарифмической спирали и, следовательно, $OM = Ae^{-kt}$. Но тогда:

$$S = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha).$$

Полученное выражение показывает, что S будет изменяться по закону амплитуд затухающего колебания. Таким



Черт. 183

образом точка действительно будет совершать затухающие колебания.

В силу этого обстоятельства построение кривой затухающих синусоидальных колебаний может быть произведено по тому же способу, которым мы пользовались для построения обыкновенной синусоидальной кривой, только вместо окружности должна быть взята логарифмическая спираль.

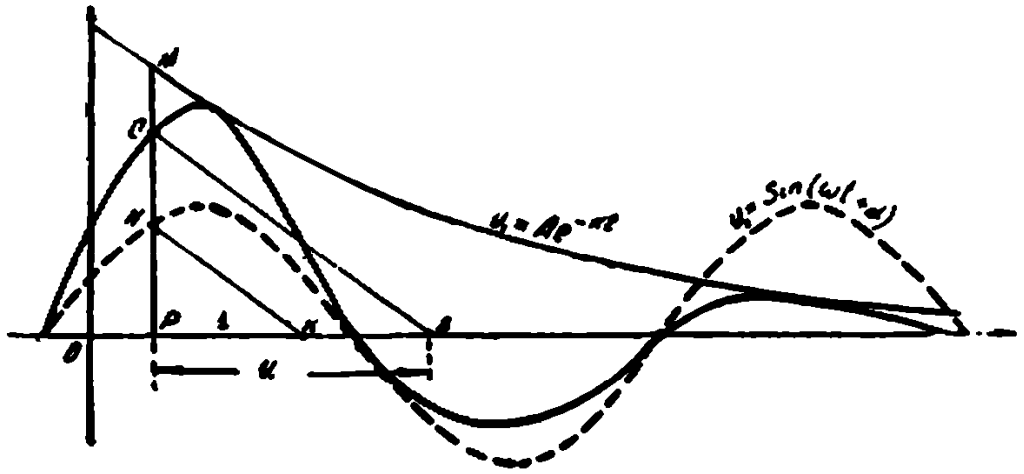
Построение кривой затухающих колебаний.

Построение кривой затухающих синусоидальных колебаний можно произвести также следующим образом. Так как $y = Ae^{-kt} \sin(\omega t + \alpha)$, то ордината кривой может быть получена в результате перемножения ординат кривых $y_1 = Ae^{-kt}$ и $y_2 = \sin(\omega t + \alpha)$.

Но из равенства $y = y_1 y_2$ следует: $\frac{y}{y_1} = \frac{y_2}{1}$; таким образом искомая ордината будет четвертым пропорциональным отрезком к трем данным y_1, y_2 и 1.

Исходя из этого замечания, производим построение следующим образом: строим прежде всего кривые $y_1 = Ae^{-kt}$

и $y_2 = \mathrm{Sin}\,(\omega t + \alpha)$ по тем правилам, о которых говорилось выше, затем берем абсциссу OP и строим соответствующие ей ординаты $MP = y_1$ и $NP = y_2$ (черт. 184). Откладываем от точки P отрезки $PK = 1$ и $PS = y_1$; соединяем точки K и N, и через точку S проводим $SC \parallel KN$.



Черт. 184.

Тогда из подобия треугольников PNK и PMS следует:

$$\frac{CP}{y_1} = \frac{y_2}{1},$$

откуда:

$$CP = y_1\ y_2 = y.$$

Таким образом полученный в результате построения отрезок CP и будет ординатой кривой затухающих колебаний, соответствующей абсциссе OP.

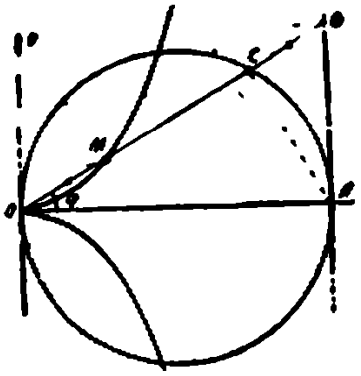
Подобным образом можно построить сколько угодно точек.

ЦИССОИДА ДИОКЛЕСА.

Циссоида является одной из кривых, которые были известны еще древним грекам. Эту кривую изобрел Диоклес (150 л. до н. э.) для целей решения знаменитой задачи древности об удвоении куба (делийская задача).

Вывод уравнения.

Циссоида может быть построена следующим образом: возьмем окружность диаметра $OA = 2a$ и касательную к ней AB (черт. 185). Через точку O, диаметрально противоположную точке A, проводим прямую OB и на ней откладываем отрезок $OM = BC$; тогда точка M будет точкой циссоиды. Повернув OB на некоторый угол и проделав снова указанное построение, получим вторую точку циссоиды и т. д.



Черт. 185

Для получения полярного уравнения циссоиды, имеем:

$$\rho = OM = OB - OC;$$

но из $\triangle OCA$:

$$OC = 2a \operatorname{Cos} \varphi,$$

и из $\triangle OBA$:

$$OB = \frac{2a}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

Тогда:

$$\rho = \frac{2a}{\operatorname{Cos} \varphi} - 2a \operatorname{Cos} \varphi = \frac{2a \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

Таким образом **полярное уравнение циссоиды:**

$$\rho = \frac{2a \operatorname{Sin}^2 \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}.$$

Пользуясь формулами перехода от полярных координат к декартовым, получаем **уравнение циссоиды в декартовых координатах:**

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (1)$$

Параметрическую форму уравнения циссоиды можно получить, полагая

$$y = \frac{x}{t};$$

тогда, по основному уравнению (1), приходим к системе:

$$x = \frac{a}{t^2 + 1}; \qquad y = \frac{a}{t(t^2 + 1)},$$

которая выражает уравнение циссоиды в параметрической форме. Судя по виду полученных уравнений, заключаем, что циссоида относится к классу уникурсальных кривых.

Исследование формы.

Так как у входит в уравнение циссоиды только в четной степени, то, очевидно, кривая симметрична относительно оси x-ов.

При изменении x-са от 0 до 2a у изменяется от 0 до ∞, таким образом циссоида имеет бесконечные ветви.

Слева от оси y-ов кривая не существует, так как при отрицательных значениях x-са y оказывается мнимым. Кроме этого x не может принимать значений $> 2a$, так как при этом y также оказывается мнимым.

Таким образом вся кривая будет лежать в участке между осью y-ов и прямой $x = 2a$, причём, так как при $x \to 2a$ $y \to \infty$, то, очевидно, прямая $x = 2a$ является ассимптотой циссоиды.

Начало, координат является для циссоиды особой точкой и так как при этом:

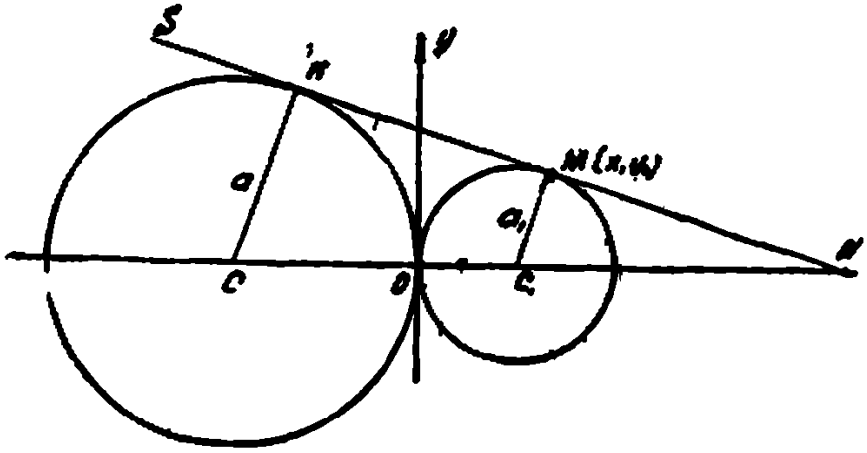
$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^3 + 8ay + 24ax - 4xy - 12x = 0, \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

то, очевидно, начало является для циссоиды точкой возврата 1-го рода.

Иной способ образования циссоиды.

Циссоида может быть получена также как геометрическое место точек, построенных следующим образом: пусть

имеем неподвижный круг радиуса a, к этому кругу в точке O касается другой круг радиуса a_1, SN—общая касательная этих кругов (черт. 186). Вообразим теперь, что меньший круг катится по окружности большего круга, причем во все время движения прямая SN остается общей касательной этих кругов; геометрическое место точки касания M и будет циссоидой. Покажем, что это—так.



Черт. 186

Имеем: $x^2 - 2a_1x + y^2 = 0$ — уравнение подвижного круга. Из подобия треугольников CKN и C_1MN получаем:

$$C_1N = \frac{a_1(a+a_1)}{a-a_1}.$$

Уравнение прямой SN, как касательной к подвижному кругу в точке $M(x_1, y_1)$ будет:

$$x(x_1 - a_1) - a_1x_1 + yy_1 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$ON = \frac{a_1x_1}{x_1 - a_1}.$$

Тогда:

$$C_1N = ON - a_1 = \frac{a_1x_1}{x_1 - a_1} - a_1,$$

и так как с другой стороны:

$$C_1N = \frac{a_1(a+a_1)}{a-a_1},$$

то:

$$\frac{a_1x_1}{x_1 - a_1} = \frac{a_1(a+a_1)}{x - a_1},$$

откуда:

$$n_1 = \frac{nx_1}{2a - x_1}.$$

Подставляя полученное выражение n_1 в уравнение подвижного круга, получаем обычное уравнение циссоиды:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

Циссоида как подэра параболы.

Покажем, что циссоида:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

является подэрой параболы

$$y^2 = -8ax$$

относительно ее вершины. Действительно, уравнение касательной к параболе в точке $M(x_1, y_1)$ будет иметь вид:

$$yy_1 = -4a(x + x_1), \qquad (1)$$

уравнение перпендикуляра, опущенного на касательную из начала, примет вид:

$$y = \frac{y_1}{4a}x \qquad (2)$$

Присоединяя к уравнениям (1) и (2) уравнение параболы, заменим в нем x и y координатами точки касания M, исключив из этих трех уравнений x и y, придем к уравнению циссоиды.

Длина дуги циссоиды, площадь и т. п.

Длина дуги циссоиды, заданной в полярной системе, выражается формулой:

$$S = 2a\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} - \sqrt{3}\ln\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь между осью x-ов, асимптотой циссоиды и ее ветвью определяется по формуле:

$$U = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Объем тела, производимого вращением циссоиды вокруг ее асимптоты: $V = 2\pi^2 a^3$.

Применение циссоиды к решению задачи об удвоении куба.

Рассмотрим теперь применение циссоиды к решению задачи об удвоении куба. Аналитически эта задача решается просто: если b—ребро данного куба, а B—ребро куба, объем которого в 2 раза больше, то $B^3 = 2b^3$, откуда $B = b\sqrt[3]{2}$. Отсюда ясно, что графическое решение задачи должно свестись к построению $\sqrt[3]{2}$. Для этой цели уравнение циссоиды перепишем в виде:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y}{2a-x}.$$

Прямая $\frac{y}{x} = k$ отсекает от касательной отрезок $AD = 2ak$ (1) (черт. 187) и пересекает циссоиду в точке M, координаты которой удовлетворяют уравнению:

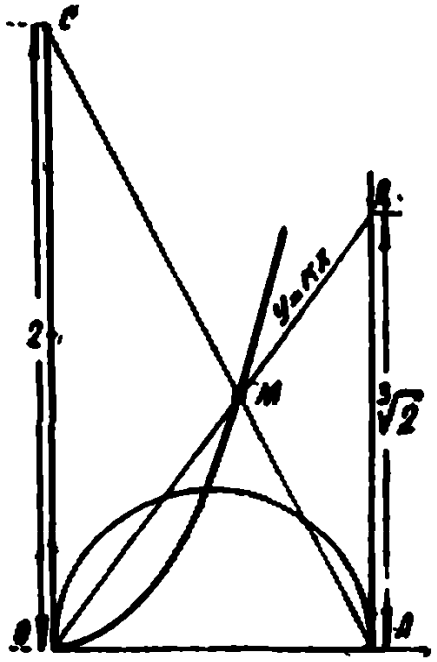
$$\frac{y}{2a-x} = k^3;$$

а это уравнение выражает прямую, проходящую через точку A (2a, 0).

Эта прямая в свою очередь отсекает на оси y-ов отрезок

$$OC = 2ak^3 \qquad (2)$$

Если теперь принять $a = \frac{1}{2}$ и на оси y-ов отложить отрезок OC=2, соединить точку C с точкой A (1, 0), точку M пересечения прямой CA с циссоидой соединить с точкой O и продолжить этот отрезок до пересечения с касательной в точке D, то из формул (1) и (2) непосредственно будет следовать, что $AD = \sqrt[3]{2}$.



Черт 187.

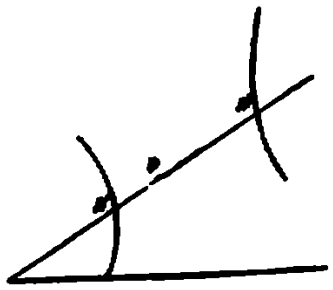
Циссоидальные кривые.

Соответственно тому, как рассмотренная циссоида была получена с помощью окружности, можно было получить циссоиду, заменив окружность эллипсом или какой-либо

иной кривой. Вообще говоря, если заданы кривые

$$\rho = f_1(\varphi) \quad \text{и} \quad \rho = f_2(\varphi)$$

в полярной системе с полюсом в точке O (черт. 188), то можно образовать третью кривую, откладывая на каждом радиусе-векторе OM отрезок OP = NE; геометрическое место концов этих отрезков и будет некоторой новой кривой. Полученные таким образом кривые называются **циссоидальными кривыми**.



Черт 188

Заметим в заключение, что название циссоиды происходит от греческого слова κισσός—плющ; дело в том, что греки изучали циссоиду только в пределах круга: фигура, образованная дугами окружности и циссоиды, очевидно, напоминала им лист плюща.

Циссоида, как кривая с бесконечными ветвями, стала изучаться лишь в XVIII столетии.

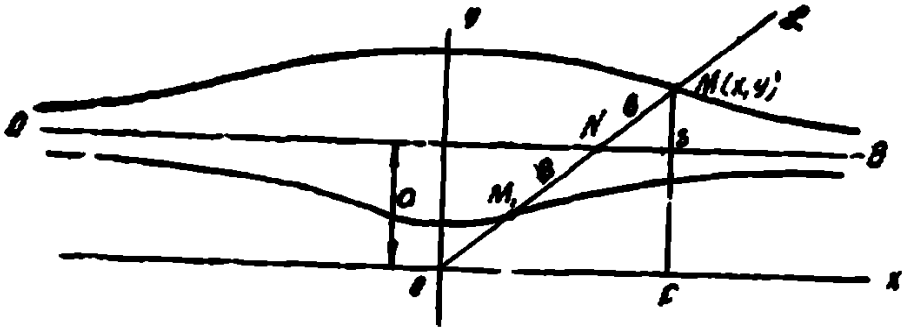
КОНХОИДА НИКОМЕДА.

Вывод уравнения.

Конхоида или улиткообразная кривая изобретена Никомедом (150 л. до н. э.).

Эта кривая может быть получена следующим образом:

Из точки O, отстоящей от прямой AB на расстояние a, проводим луч OL (черт. 189). Вообразим, что этот луч вращается вокруг точки O, и в каждом его положении от точки его пересечения с прямой AB откладывается на нем



Черт. 189.

отрезок NM=b. Геометрическое место концов этого отрезка выразится некоторой кривой, уравнение которой весьма просто получается следующим образом:

$$\triangle MNS \sim \triangle MOP,$$

откуда:

$$\frac{OM}{MN} = \frac{MP}{MS} \qquad (1)$$

или:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b} = \frac{y}{y-a},$$

следовательно:

$$(x+y^2)(y-a)^2 - b^2y^2 = 0.$$

Очевидно, пропорция (1) совершенно не изменится, если отрезок NM будем откладывать от точки N по направлению

к точке O. Геометрическое место концов откладываемых таким образом отрезков даст как бы вторую кривую. На самом же деле обе эти кривые являются ветвями одной и той же кривой, (уравнение которой мы получили), которая и является конхоидой.

Исследование формы.

Из полученного уравнения следует, что конхоида является алгебраической кривой 4-го порядка, зависящей от двух параметров—a и b. Взаимное соотношение величин этих параметров в значительной степени влияет на форму кривой, в чем мы убедимся при ближайшем исследовании. Определим точки пересечения ветвей конхоиды с осью y-ов.

Полагая $x=0$, получаем из уравнения:

$$y_1=a+b \quad и \quad y_2=a-b.$$

Таким образом кривая в двух точках пересекает ось y-ов. Но непосредственно видно, что координаты начала также удовлетворяют уравнению конхоиды. Таким образом начало координат является точкой, принадлежащей конхоиде, хотя при нашем предположении (см. чертеж), согласно которому $b<a$, ни одна из ветвей кривой не может пройти через начало. Очевидно, начало является изолированной точкой конхоиды. Чтобы убедиться в этом, исследуем кривую на особые точки, для чего определим прежде всего значение y' для начала координат. Имеем, переписав уравнение конхоиды в виде:

$$f(x, y)=(x^2+y^2)(y-a)^2-b^2y^2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(y-a)^2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+y^2)+2y(y-a)^2-2b^2y,$$

откуда

$$y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{0}{0}.$$

Таким образом, действительно, начало является особой точкой конхоиды. Выясним природу этой точки, для чего исследуем, как обычно, знак $\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

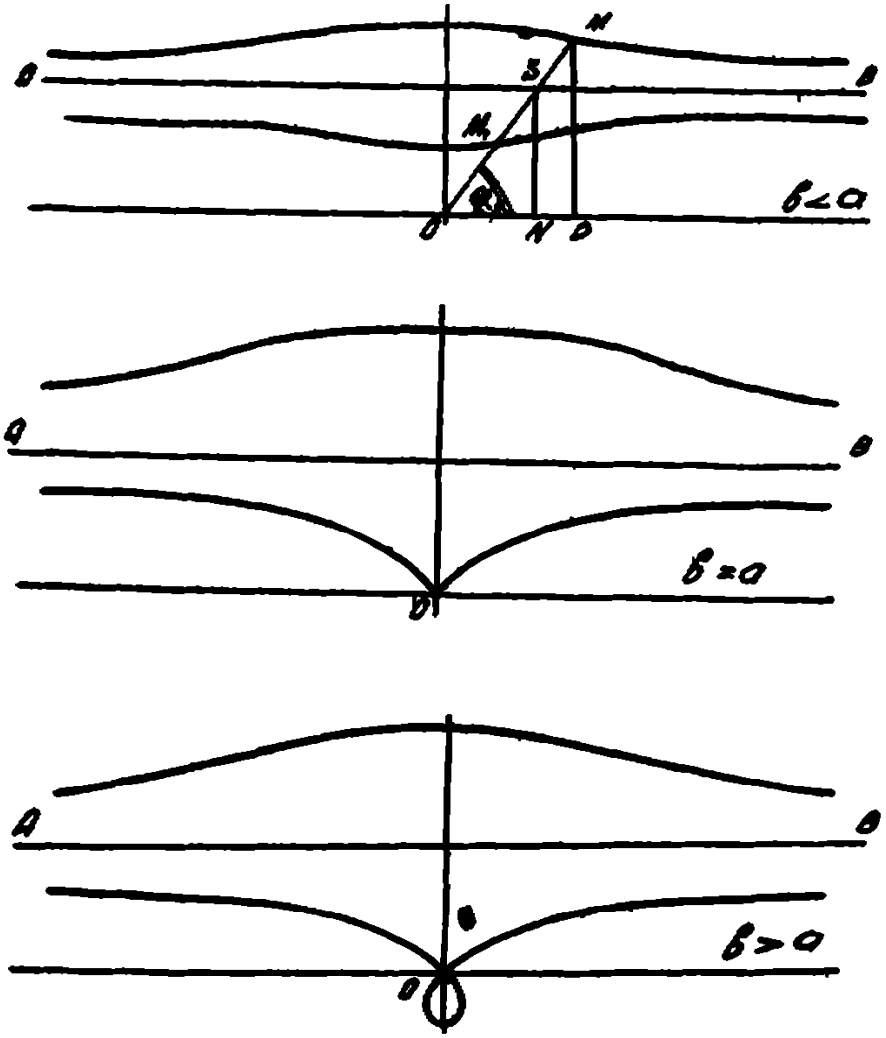
Имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y-a)^2 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2a^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y + 6y^2 - 8ay + 2a^2 - 2b^2 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2(a^2-b^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 4(y-a)\,x \Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$$

Таким образом $\Delta = -4a^2(a^2-b^2) = -4a^2(a+b)(a-b)$. Как видно, при $b<a$ и $\Delta<0$, следовательно, в этом случае



Черт. 190

особая точка является изолированной; при $b=a$ получаем $\Delta=0$ и, следовательно, начало координат будет точкой возврата; наконец, при $b>a$ и $\Delta>0$ и, следовательно, получаем двойную точку.

Соответственно этим трем случаям существуют три различные формы конхоиды, приведенные на чертеже 190.

Прямая AB является асимптотой, к которой приближаются обе ветви конхоиды. В этом нетрудно убедиться аналитически: приравняв нулю, согласно общему правилу, коэффициент при высшей степени x в уравнении кривой, мы получаем уравнение асимптоты параллельной оси x-ов.

В нашем случае $(y-a)^2=0$, откуда уравнение $y=a$ и будет уравнением прямой AB—асимптоты конхоиды (называемой о с н о в а н и е м конхоиды).

Весьма просто получается п о л я р н о е у р а в н е н и е к о н х о и д ы.

Очевидно,

$$\rho = OS \pm b.$$

Из $\triangle OSN$ имеем:

$$OS = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Подставляя, получим:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b.$$

Если в формулы перехода от полярной системы координат к декартовой

$$x = \rho\cos\varphi \quad \text{и} \quad y = \rho\sin\varphi$$

подставить вместо ρ значение его из полярного уравнения конхоиды, то система:

$$\begin{cases} x = a \pm b\cos\varphi \\ y = a\,tg\varphi \pm b\sin\varphi \end{cases}$$

будет п а р а м е т р и ч е с к о й ф о р м о й уравнения конхоиды.

Конхоидальный циркуль.

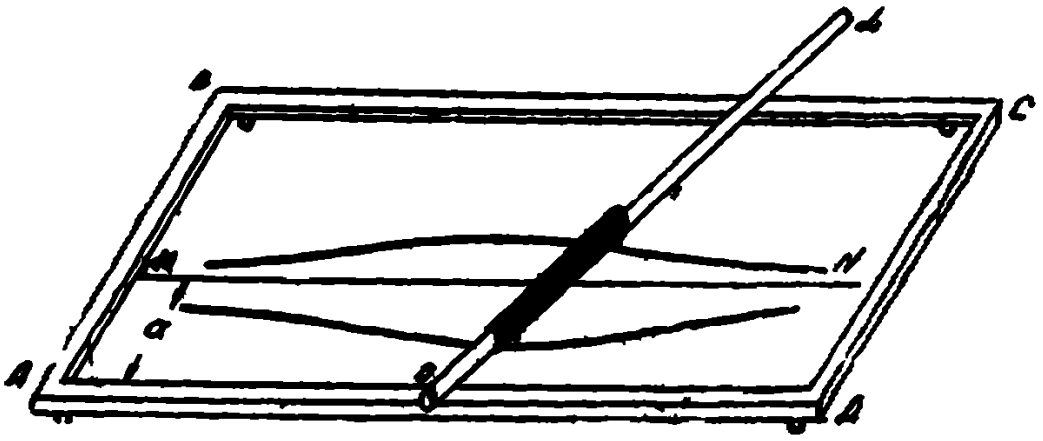
Для вычерчивания конхоиды может быть весьма просто устроен так называемый конхоидальный циркуль.

Основанием его служит рама ABCD (черт. 191). Между боковыми планками этой рамы натянута проволока MN. Посредине планки AD в точке O укреплен стержень OL, который может вращаться вокруг O.

На проволоке MN надета свободно двигающаяся муфточка, соединенная стержеиьком (черт. 192). На стержень OL надевается цилиндрик, который может свободно двигаться вдоль стержня OL. По краям этого цилиндрика прикреплены чертящие острия, а по середине—шайбочка, при

помощи которой цилиндрик надевается на стерженек муфточки.

Таким образом при вращении стержня OL вокруг точки O цилиндрик будет двигаться поступательно вдоль стержня и в то же время будет поворачиваться в горизонтальной плоскости вокруг стерженька муфточки.



Черт. 191.

Проволока MN играет роль основания конхоиды. Длина цилиндрика равна 2b.

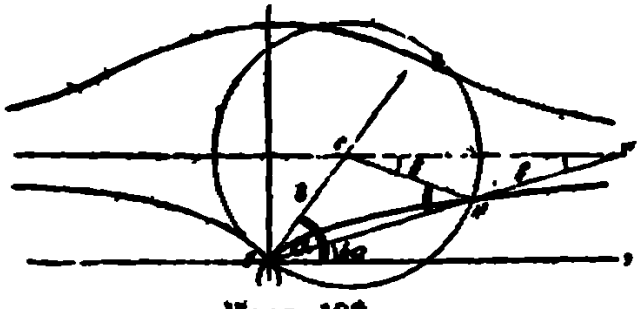
Черт. 192.

Если цилиндрик сделать раздвижным, то при помощи этого прибора удастся вычертить все виды конхоиды.

Трисекция угла с помощью конхоиды.

При помощи конхоиды древние решили задачу о трисекции угла следующим образом:

Пусть угол α необходимо разделить на 3 равных части (черт. 193). Отложим для этого на одной из сторон его отрезок OC=b. Из точки C радиусом, равным b, проводим окружность. Затем через точку C проводим прямую, параллельную другой стороне угла. Принимая



Черт 193

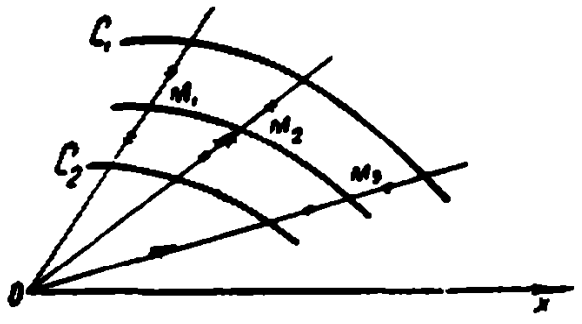
эту прямую за основание, а точку O—першяну угла α—запачальную точку, строим конхоиду. Через точку пересечэння конхоиды с окружностью круга а через точку M пересечэния конхоиды с окружностью проводим прямую OM. Тогда угол $MOX = \frac{1}{3}\alpha$. Для доказательства продолжаем OM до пересечэния с основанием конхоиды в точке N. Тогда, по свойству конхоиды $MN = b$, в силу этого $\triangle CMN$—раўнабедраны; раўнабедраным з'яўляецца таксама $\triangle OCM$. Суадносіны велічынь вуглоў гэтых трохвугольнікоў і доказваюць справядлівасць пабудовы.

Конхоідальныя крывыя.

Прадположым, што ў палярнай сістэме координат з полюсам у точке O задана крывая:

$$\rho = f(\varphi) \qquad (1)$$

Тады можна образаваць новую крывую, праводзя радыусы-вектары OM_1, OM_2, OM_3 і т. д. і адкладваючы на іх па ту і другую сторону ад точак M_1, M_2, M_3 і т. д. адрэзкі, роўныя некаторай пастаяннай адрэзку b (чарт. 194). Геометрычнае месца канцоў гэтых адрэзкаў будзе прадстаўляць сабою некаторую новую крывую, складаючуюся з дзвюх галін C_1 і C_2 і называемую конхоідай, адпаведнай крывой (1).



Чарт 194.

Ураўненне яе, відавочна, будзе мець выгляд:

$$\rho = f(\varphi) \pm b.$$

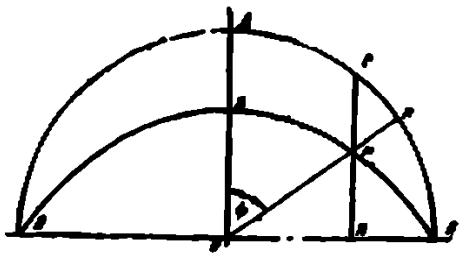
Разгледжаны намі конхоіда Никомеда з'яўляецца частным выпадкам конхоідальных крывых, выпадкам, калі асновай крывой (1) з'яўляецца прамая.

КВАДРАТРИССА ДИНОСТРАТА.

Вывод уравнения.

Квадратрисса является одной из крупных, открытых древними в поисках решения задачи о трисекции угла. Она получается следующим образом. Вообразим, что радиус ON=a полуокружности ABD равномерно вращается вокруг центра, начав движение от положения радиуса OA (черт. 195).

Пусть через T единиц времени он занял положение перпендикулярного радиуса OD. Очевидно, при этом угловая скорость его вращения будет равняться $\frac{\pi}{2T}$.



Черт. 195

Представим далее, что прямая CK, перпендикулярная диаметру AB, передвигается параллельно самой себе, начав движение из положения, при котором точка K совпадает с точкой A. Предположим, что за время T она успевает от исходного положения прийти к положению OD.

В таком случае скорость движения точки K, очевидно, будет равняться $\frac{a}{T}$. Если представить себе, что движение радиуса ON и прямой CK начались одновременно от их начальных положений, то точка M их пересечения опишет квадратриссу.

Исходя из этого, получим параметрические уравнения квадратриссы. Пусть положение точки M на чертеже соответствует моменту t времени, прошедшего от начала движения.

Тогда:

$$x = OK = a - \frac{a}{T}t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right);$$

$$y = MK = OK \operatorname{tg} \angle MOA = a\left(1 - \frac{t}{T}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2T} =$$

$$= a\left(1-\frac{t}{T}\right)\operatorname{Ctg}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

Если выражение $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)$ обозначить через φ, то параметрические уравнения квадратриссы примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2a}{\pi}\varphi \\ y &= \frac{2a}{\pi}\varphi\operatorname{Ctg}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что параметр φ является углом NOD.

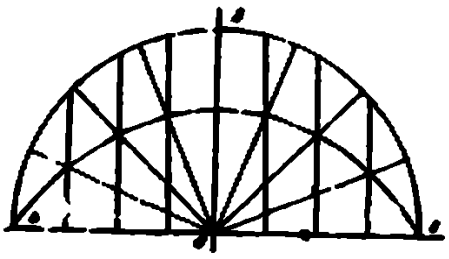
Исключив из уравнения (1) параметр φ, получим уравнение квадратриссы в обычной форме:

$$y = x\operatorname{Ctg}\frac{\pi x}{2a}.$$

Построение квадратриссы.

Полуокружность ADB и диаметр AB делим на одинаковое число равных частей (например, на 8,—черт. 196).

В точки деления полуокружности проводим радиусы, а из точек деления диаметра восставляем к нему перпендикуляры. Точки пересечения радиусов с перпендикулярами будут принадлежать квадратриссе.



Черт. 196.

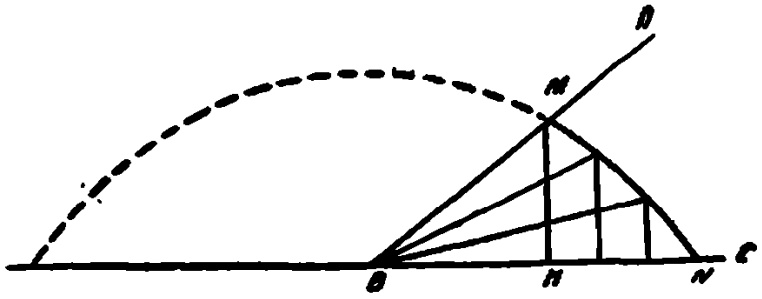
Деление угла на равные части и квадратура круга с помощью квадратриссы.

При помощи тщательно вычерченной на листе бумаги или жести и затем вырезанной квадратриссы можно разделить заданный угол ABC на произвольное число равных частей.

Для этой цели прикладываем квадратриссу так, чтобы ее основание совпало с одной из сторон угла ABC, а середина ее основания—точка B совпала бы с вершиной этого угла (черт. 197). Проведя дугу MN квадратриссы, убираем ее и из точки M опускаем на BC перпендикуляр MK. Если

теперь отрезок NK разделить на n равных частей, из точек деления восстановить перпендикуляры и точки их пересечения с дугой квадратрисы соединить с точкой B, то угол ABC разделится на n равных частей.

Квадратриса была изобретена Гиппием Элейским для решения задачи о трисекции угла. Но уже Динострат показал, что с помощью этой кривой может быть произведена квадратура круга, ибо начальная ордината ее OS выражается через π.



Черт. 197.

Действительно, пользуясь правилом Лопиталя, находим:

$$OS = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2a\varphi}{\pi} \operatorname{Ctg} \varphi = \frac{2a}{\pi} \lim \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2a}{\pi} \lim \operatorname{Cos}^2 \varphi = \frac{2a}{\pi},$$

Таким образом, располагая отрезком OS, можно путем элементарных построений произвести квадратуру круга.

Очевидно, этим обстоятельством и определяется название кривой.

УЛИТКА ПАСКАЛЯ.

Вывод уравнения.

Улиткою называется геометрическое место точек, построенных следующим образом: дается круг с диаметром $OA = 2a$ (черт. 198). Из точки O, лежащей на окружности этого круга, проводим радиус-вектор OL и на нем откладываем в обе стороны отрезки постоянной длины $NM = NM_1 = b$. Воображаем, что луч OL вращается около точки O. Геометрическое место точек M и M_1 и дает кривую, называемую улиткой.

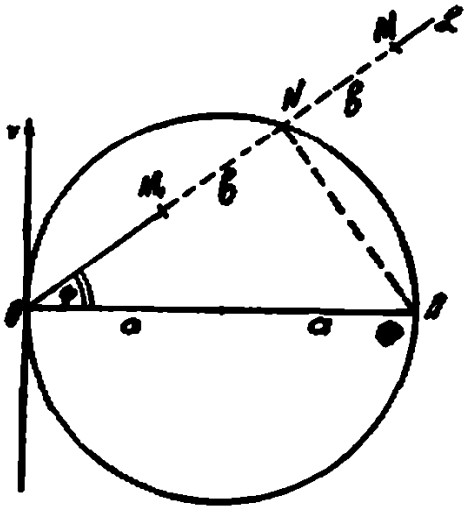
Весьма просто получается полярное уравнение улитки.

Имеем из $\triangle ONA$:

$$ON = 2a\cos\varphi,$$

откуда:

$$\rho = 2a\cos\varphi \pm b.$$



Черт 198.

Пользуясь формулами перехода, получим уравнение улитки в прямоугольной системе

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \pm b,$$

или

$$(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2).$$

Заметим, что улитки Паскаля строятся по тому же принципу, что и конхоида Никомеда, но только в этом случае роль прямой AB (основания конхоиды) играет окружность.

В силу этого улитку называют иногда конхоидой круга.

Форма улитки.

Из уравнения видно, что улитка является алгебраической кривой 4-го порядка, зависящей от двух параметров.

Остановимся на исследовании формы улитки. Так же, как и для конхоиды, начало координат является для улитки особой точкой. В этом легко убедиться.

Имеем:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2+y^2-2ax)(2x-2a) - 2b^2x = 0 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2+y^2-2ax)2y - 2b^2y = 0 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

откуда

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{0}{0},$$

следовательно, начало действительно является особой точкой улитки. Для установления вида особой точки, исследуем знак $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(x^2+y^2-2ax)2 + (2x-2a)\cdot 2(2x-2a) - 2b^2 = 8a^2 - 2b^2 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x^2+y^2-2ax)\,2 + 8y^2 - 2b = -2b^2 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (2x-2a)\,4y = 0 \Big|_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

Таким образом

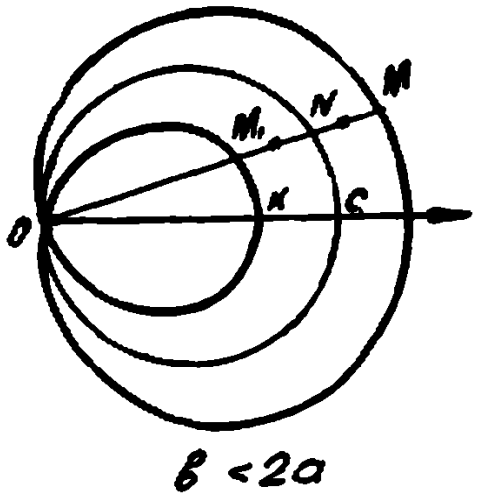
$$\Delta = 16a^2b^2 - 4b^4 = 4b^2(4a^2 - b^2).$$

Отсюда ясно, что при $b<2a$ имеем: $\Delta>0$ и, следовательно начало будет двойной точкой улитки; при $b=2a$ имеем $\Delta=0$—следовательно начало будет точкой возврата, наконец, при $b>2a$ имеем: $\Delta<0$ и получаем таким образом, что в этом случае начало будет изолированной точкой улитки (черт. 199 и 200).

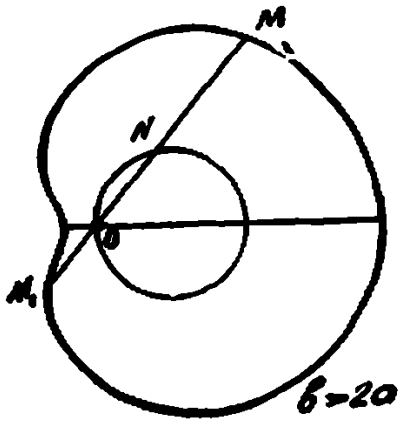
Интересно заметить, что случай $b=2a$ дает уравнение улитки в виде:

$$\rho = -2a(1 \pm \cos\varphi),$$

ио пто урпппеппе кпрдиоиды, лежпщей спрпва от ячалп координат, если п скобкпх зпак —, и слепа, если +. Тпким обрпзом окпзывается, что кпрдяоидп является члепом трех клпссоп крпвых—эппцяклоид, спнусоидальпых спиралей и, пакопец, улиток.



Черт 199



Черт 200

В перпом случпе при b<2a определим длину OK получпемой петли. Очепидно

$$OK = OC - KC = 2a - b.$$

Пря b=п OK=п и петля тпким обрпзом проходит через цептр кругп.

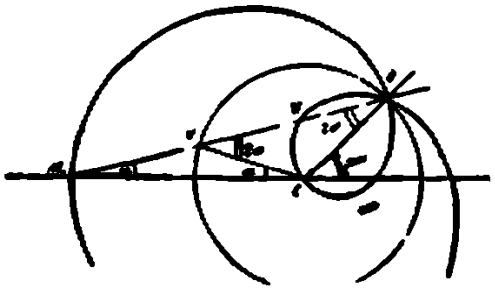
Трисекция угла при помощи улитки.

Улиткп является одной из крпвых, прп помощп которой можпо решпть зпдачу о трпсекцпп углп.

В спмом деле, если взять улитку с петлей, проходящей через цептр круга, то, кпк легко впдеть яз чертежп 201-го, $\triangle M_1NC$ и $\triangle NCO$—будут раппобедреппыми откуда:

$$\angle OM_1B = \frac{1}{3}\angle OCB.$$

Тпким обрпзом подобпп улитка, ппзыппемпя тпкже трпсектрпссой (trisectrix), зарапее пачерчеппя пп прозрпчпом материпле, действительно может служять



Черт 201

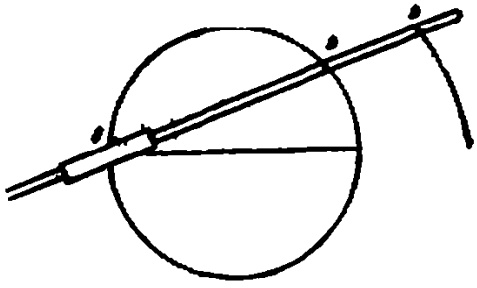
прибором, позволяющим находить третью часть данного угла.

Построение улитки.

Для вычерчивания улитки может быть устроен прибор следующим образом: в некоторой точке плоскости укрепляем муфточку, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси; в эту муфточку просовываем стержень, несущий направляющее острие A и чертящее острие B. Если теперь вращать стержень AB, регулируя его движение так, чтобы направляющее острие двигалось по окружности, то чертящее острие вычертит улитку (см. чертеж 202).

Применение улитки в технике.

В технике улитки используется для очерчивания эксцентриков в некоторых механизмах. Для этой цели берут улитку при $b > 2a$. Эксцентрик очерченный по улитке сообщает стержню, которому он передает движение, гармонические колебания. Это можно усмотреть из того, что путь S пройденный точкой эксцентрика, очевидно, выразится формулой:



Черт. 202.

$$S = \rho = 2a \cos \omega t + b =$$

$$= 2a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b.$$

Полученное выражение показывает, что движение действительно должно быть гармоническим. Интересно отметить, что при этом скорость $V = -2a\omega \sin \omega t$ полученного движения будет изменяться плавно, без скачков. Этим эксцентрики, очерченные по улитке, выгодно отличаются от эксцентриков, очерченных по спирали Архимеда (сердцевидных эксцентриков), у которых, благодаря постоянству скорости, происходят в конце каждого хода стержня удары, способствующие быстрому изнашиванию механизма.

Один из составных частей в механизме для поднятия и опускания железнодорожного семафора очерчен по улитке Паскаля. Свойство эксцентрика, очерченного по улитке, сообщать стержню гармоническое движение оказывается здесь необычайно полезным, так как при таком движении скорость поднятия или опускания плеча семафора, являясь мини-

мальной в начале подпятия или опускания, достигает max в середине. Этим обеспечивается плавный переход плеча семафора с незначительными начальным и конечным толчками и значительно облегчается сопротивление инерции и трения, особенно скрывающегося в начальный момент работы привода.

Длина улитки и площадь ее.

Определяя дугу улитки получим:

$$S = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{4a^2 \cos^2\varphi \pm 4ab \cos\varphi + b^2 + 4a^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi_1} \sqrt{4a^2 + b^2 \pm 4ab \cos\varphi}\, b\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi_1} \sqrt{4a^2 + b^2 \pm 4ab - 8ab \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= (2a \pm b) \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - \frac{8ab}{2a \pm b} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi.$$

Итак длина дуги улитки выражается эллиптическим интегралом 2-го рода.

Площадь улитки. $\rho = 2a \cos\varphi + b$ при $b \geqslant 2a$ выразится следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2a \cos\varphi + b)^2\, d\varphi = \pi (2a^2 + b^2)$$

ДЕКАРТОВ ЛИСТ.

Уравнение.

Листом Декарта (Folium Cartesii) называют кривую, имеющую в прямоугольных координатах уравнение:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad (1)$$

Полагая $\frac{y}{x} = t$ и подставляя в данное уравнение, получаем

$$x^3 + x^3t^3 - 3ax \cdot xt = 0,$$

откуда после деления обеих частей на x^2 получаем параметрические уравнения Декартова листа:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Так как правые части этих уравнений являются рациональными функциями параметра t, то заключаем, что Декартов лист относится к классу уникурсальных кривых.

Наконец, после подстановки в уравнение (1) формул перехода $x = \rho \operatorname{Cos}\varphi$ и $y = \rho \operatorname{Sin}\varphi$, получаем полярное уравнение Декартова листа:

$$\rho = \frac{3a \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}^3\varphi + \operatorname{Sin}^3\varphi}.$$

Особенности формы.

Остановимся на исследовании формы кривой.

Так как в уравнении Декартова листа переменные входят в четной степени, то, очевидно, кривая не будет симметричной относительно коорд. осей; но из уравнения хорошо видно, что при замене переменного x переменным y, уравнение совершенно не меняется. Это показывает, что кривая симметрична относительно биссектрисы 1-го координатного угла (черт. 203). Далее, непосредственно из уравнения видно, что кривая проходит через начало и что ни в каких других точках она не пересекает осей координат. Определим значение y′ в начале координат.

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x - 3ay,$$

откуда:

$$y' = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{0}{0}.$$

Полученное значение y' указывает, что начало является **особой точкой кривой.**

Для определения вида особой точки исследуем знак

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y' \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -3a,$$

то:

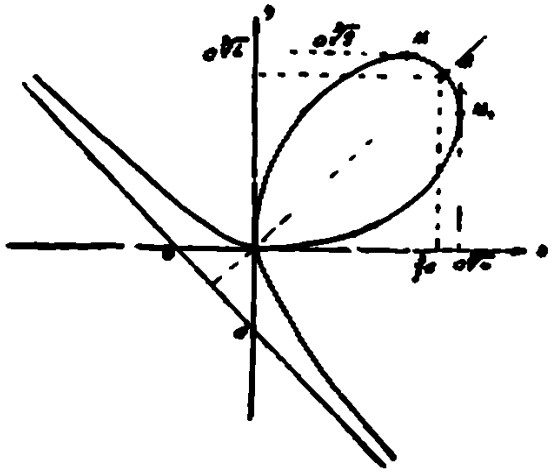
$$\Delta = 9a^2.$$

Таким образом оказывается, что Δ всегда > 0, а это показывает, как известно из дифференциальной геометрии, что начало координат является для Декартова листа **узловой точкой.**

Определим уравнения касательных к Декартову листу в начале координат. Для этого, как известно, достаточно приравнять к нулю группу членов низшей степени в уравнении кривой.

Имеем: $3axy = 0$, откуда получаем уравнения касательных:

$$x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0.$$



Черт 203

Таким образом оказывается, что касательные к Декартову листу в начале координат совпадают с координатными осями, а это показывает, что в **начале координат кривая**

пересекает сама себя под прямым углом.

Таким образом мы можем уже заключить, что в 1-ом координатном углу кривая делает петлю, для которой биссектриса служит осью симметрии. Решая совместно уравнения $x^3+y^3-3axy=0$ и $y=x$, найдем координаты вершины петли.

Имеем:

$$x^3+x^3-3ax^2=0,$$

откуда:

$$x_1=x_2=0 \quad \text{и} \quad x_3=\frac{3}{2}a$$

и, следовательно:

$$y_3=\frac{3}{2}a,$$

Таким образом вершина петли находится в точке $M\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Чтобы лучше выяснить течение кривой в 1-ом координатном углу, определим еще точки, в которых касательные к Декартову листу параллельны осям координат.

Мы уже имели:

$$y'=\frac{x^2-ay}{y^2-ax};$$

очевидно, для точки, в которой касательная параллельна оси x-ов, необходимо, чтобы

$$x^2-ay=0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением кривой, находим, что координаты искомой точки M_1 будут $a\sqrt[3]{2}$ и $a\sqrt[3]{4}$. Подобно этому для точки, в которой касательная параллельна оси y-ов, необходимо, чтобы

$$y^2-ax=0.$$

Поступая таким же образом, как и выше, мы находим координаты точки $M_2\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$. Чтобы уяснить, как ведет себя кривая в остальных координатных углах, исследуем ее на асимптоты.

Для этого, как известно, необходимо заменить y в уравнении кривой через $kx+b$, после чего приравнять в полученном уравнении к нулю коэфициенты при двух высших степенях x.

Имеем после подстановки:

$$x^3+k^3x^3+3k^2bx^2+3kb^2x+b^3-3akx^2-3abx=0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при x^3 и x^2, получим:

$$1+k^3=0;\quad 3k^2b-3ak=0.$$

После решения этих уравнений находим:

$$k=-1 \quad и \quad b=-a;$$

следовательно, Декартов лист имеет асимптоту:

$$y=-x-a.$$

Ассимптота отсекает на осях координат отрезки длиною a. Таким образом во втором и четвертом координатных углах петли Декартова угла уходят в бесконечность.

Свойства Декартова листа.

Остановимся на одном интересной свойстве Декартова листа. Предположим, что три точки кривой M_1, M_2 и M_3 соответствуют значениям параметра t_1, t_2 и t_3.

Выясним, какия зависимость должна быть между, t_1, t_2 и t_3, для того чтобы точки M_1, M_2, M_3 лежали на одной прямой. Условные нахождения трех точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) на одной прямой, как известно, выражается равенством:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для нашего случая, принимая во внимание параметрические уравнения Декартова листа, получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{3at_1}{1+t_1^3}; & \frac{3at_1^2}{1+t_1^3}; & 1 \\ \frac{3at_2}{1+t_2^3}; & \frac{3at_2^2}{1+t_2^3}; & 1 \\ \frac{3at_3}{1+t_3^3}; & \frac{3at_3^2}{1+t_3^3}; & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разверпув этот определитель, легко убеждаемся после небольших преобразований, что он будет равен нулю при $t_1 t_2 t_3 = 0$. Итак: если три точки Декартова листа $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$ и $M_3(t_3)$ лежат на одной прямой, то $t_1 t_2 t_3 = 0$.

Опираясь на доказанное свойство Декартова листа, можно доказать следующее его свойство: **если в трех точках Декартова листа, лежащих на одной прямой, провести к нему касательные, то точки пересечения этих касательных с кривой будут также лежать на одной прямой.**

Это свойство, справедливое для всех кривых 3-го порядка, известно под названием **теоремы Маклорена.**

Заметим предварительно, что каждая прямая $y=kx+b$ пересекает Декартов лист как кривую 3-го порядка, вообще говоря, в 3-х точках, координаты которых найдутся в результате решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3+y^3-3axy=0 \\ y=kx+b \end{cases} \qquad (1)$$

Но если данная прямая является касательной к Декартову листу, то две точки пересечения должны совпасть и, следовательно, две ветви корней системы (1) должны быть соответственно равными, а третья будет соответствовать точке пересечения.

Для простоты дальнейших выкладок окажется удобным, пользуясь тем, что Декартов лист является универсальной кривой, заменять в уравнениях системы (1) y через $\frac{x}{t}$. Тогда определение точки касания и точки пересечения сведется к решению системы:

$$\begin{cases} x^3+\frac{x^3}{t^3}-3a\frac{x^2}{t}=0 \\ \frac{x}{t}=\frac{kx}{t}+b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+\frac{x}{t}-\frac{3a}{t}=0 \\ \frac{x}{t}=\frac{kx}{t}+b \end{cases}$$

откуда:

$$t^3-\frac{3a(1-k)}{b}t^2+1=0.$$

Два корня этого уравнения, соответствующие значению параметра в точке касания, должны быть равны между собой. Если при этом значение параметра, соответствующего точке касания, обозначить через T_1, то согласно правилам высшей алгебры получим соотношение:

$$t_1^2T_1=-1 \qquad (2)$$

Подобным образом для 2-й и 3-й касательной получим соотношения:

$$t_2^2 T_2 = -1$$
$$t_3^3 T_3 = -1 \qquad (3$$

Перемножив равенства (2) и (3), получим:

$$(t_1 t_2 t_3)^2 T_1 T_2 T_3 = -1,$$

но так как по условию:

$$t_1 t_2 t_3 = -1,$$

то, следовательно, и

$$T_1 T_2 T_3 = -1$$

и, таким образом, свойство доказано.

Заметим в заключение, что площадь, ограниченная петлей Декартова листа, выразится следующим образом:

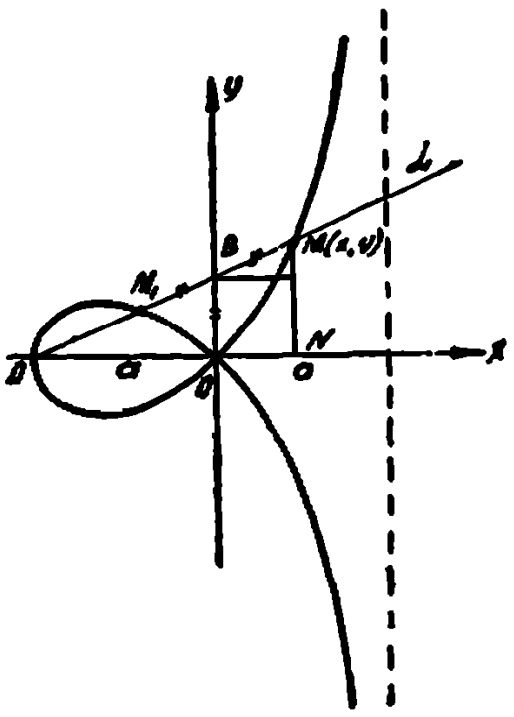
$$U = 9a^2 \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{(1+t^3)^3} = -3a^2 \left[\frac{1}{1+t^3}\right]_0^\infty = 3a^2 .$$

СТРОФОИДА.

Вывод уравнения.

Кривая, называемая строфоидой, является геометрическим местом точек, построенных следующим образом.

Пусть имеем систему координат (черт. 204). Отложим на оси x-ов отрезок $OA = a$. Вообразим затем, что вокруг точки A вращается луч AL, в каждом положении которого от точки его пересечения с осью y-ов откладываются на нем в обе стороны переменные отрезки BM и BM_1, причем $BM = BM_1 = OB$. Геометрическое место точек M и M_1 и будет строфоидой. Уравнение строфоиды получается следующим образом.



Черт 204

Пусть x и y—текущие координаты точки M. Из подобия треугольников OAB и AMN имеем:

$$\frac{y}{AN} = \frac{OB}{AO},$$

но:

$$AN = a + x$$

и

$$OB^2 = BM^2 = x^2 + (y - OB)^2,$$

откуда:

$$OB = \frac{x^2 + y^2}{2y}.$$

Подставив в пропорцию, после некоторых преобразований, получим:

$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x}.$$

Как видно из полученного уравнения, строфоида является алгебраической кривой 3-го порядка.

Для получения полярного уравнения строфоиды, пользуясь формулами перехода, имеем:

$$\rho^2 \operatorname{Sin}^2\varphi = \rho^2 \operatorname{Cos}^2\varphi \frac{a+\rho\operatorname{Cos}\varphi}{a-\rho\operatorname{Sin}\varphi};$$

после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$\rho = \frac{a(\operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi)}{1-\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi}.$$

Наконец, если положим $y = \frac{x}{t}$, то быстро приходим к параметрическим уравнениям строфоиды:

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{a(1-t^2)}{t(1+t^2)},$$

по виду которых заключим, что строфоиды относятся к классу уникурсальных кривых.

Форма строфоиды.

Остановившись на особенностях формы строфоиды, покажем, что начало координат служит для нее узловой точкой. Имеем:

$$f(x, y) = y^2(a-x) - x^2(a+x)$$

$$f_x' = -y^2 - 2ax - 3x^2; \qquad f_y' = 2ay - 2xy;$$

$$f''_{xx} = -2a - 6x, \qquad f''_{yy} = 2a - 2x, \qquad f''_{xy} = -2y.$$

Тогда:

$$\Delta = [f''_{xy}(0, 0)]^2 - f''_{xx}(0, 0)\, f''_{yy}(0, 0) = 0 - 4a^2 = -4a^2.$$

Таким образом $\Delta < 0$, это и доказывает, что начало координат является узловой точкой.

Заметим далее из уравнения строфоиды, что при $x \to a$ $y \to \infty$.

Это говорит о том, что прямая $x = a$ является асимптотой строфоиды.

Для получения уравнения касательных к строфоиде в начале координат приравняем к нулю групу членов низшей степени в ее уравнении. Имеем:

$$ay^2 - ax^2 = 0,$$

откуда уравнения касательных:

$$y = x \text{ и } y = -x.$$

Как видно, касательные эти являются биссектрисами координатных углов; таким образом оказывается, что петля строфоиды пересекаются в начале координат под прямым углом.

Свойства строфоиды.

Рассмотрим некоторые свойства строфоиды, причем предварительно, для упрощения выкладок, перенесем начало координат в точку A—вершину петли строфоиды. Пользуясь формулами преобразования координат, получим уравнение строфоиды в следующем виде:

$$y^2 = (x-a)^2 \frac{x}{2a-x},$$

и параметрические уравнения ее в виде:

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad \text{и} \quad y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Постараемся теперь найти условие, при котором три точки строфоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2 и t_3 лежат на одной прямой.

Для определения точек пересечения прямой и строфоиды необходимо, очевидно, решить систему:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, \; y = \dfrac{at(t^2-1)}{t^2+1}, \end{cases}$$

которая приведет нас к уравнению:

$$t^3 - 2kt^2 - \frac{b}{a}t^2 - t - \frac{b}{a} = 0;$$

отсюда немедленно получим, на основании теоремы высшей алгебры о соотношения между корнями и коэфициентами, уравнения:

$$t_1t_2 + t_1t_2 + t_2t_3 = -1. \qquad (1)$$

Таково искомое условие.

Выясним дальше условие, при котором четыре точки строфоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_2 и t_4, лежат на одной окружности.

Для определения точек пересечения окружности и строфоиды мы должны решить систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2+Ax+By+C=0 \\ x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}\ ; \quad y=\dfrac{at(t^2-1)}{1+t^2}, \end{cases}$$

Эта система приведет нас к уравнению:

$$\frac{4a^2t^2+a^2t^2(t^2-1)^2}{(1+t^2)^2}+\frac{2aAt^2}{1+t^2}+\frac{aBt(t^2-1)}{1+t^2}+C=0;$$

окончательно:

$$t^4+\frac{B}{a}t^3+\frac{a^2+2aA+C}{a^2}t^2-\frac{B}{a}t+\frac{C}{a}=0 \qquad (2)$$

Из этого уравнения, по основании соотношения между корнями и коэфициентами уравнения, получаем:

$$t_1+t_2+t_3+t_4=-\frac{B}{a}$$

и

$$t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=\frac{B}{a},$$

откуда искомое условие получится в виде.

$$t_1+t_2+t_3+t_4+t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4=0 \qquad (3)$$

Исходя из этого, условие, для которого три точки строфоиды, соответствующие значениям параметра t_1, t_2 и t_3, лежат на окружности круга, проходящего через начало координат, будут, очевидно, выглядеть так

$$t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3=0,$$

(так как один из корней уравнения (2) будет равным нулю).

Теперь весьма просто можно доказать интересное свойство строфоиды: если из какой-либо точки M, лежащей на строфоиде, провести к ней две касательные, касающиеся кривой в точках P и Q, то точки M, P и Q будут лежать на окружности, проходящей через начало координат (черт. 205).

Очевидно, доказательство этого положения должно свестись к тому, что значения параметра t_1, t_2 и t_3, соответ-

ствующие точки M, P и Q, удовлетворяют условию нахождения трех точек на окружности, проходящей через начало координат, т. е. условию:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3 = 0.$$

Условие нахождения точки $M(t_1)$ и двойной точки $P(t_2)$ на одной прямой выразится, согласно (1), следующим образом:

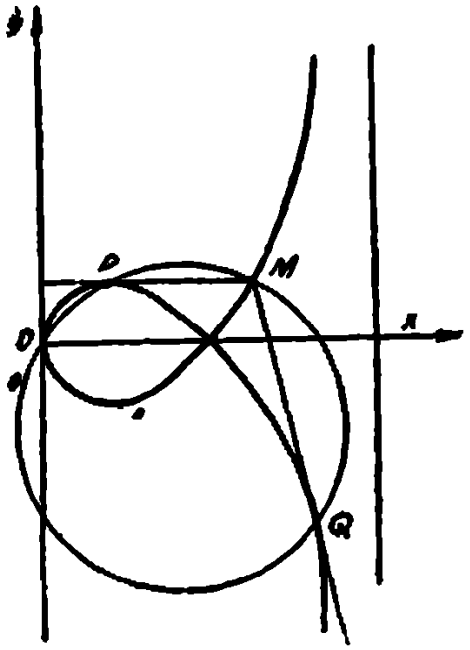
$$t_1 t_2 + t_1 t_2 + t_2 t_2 = -1$$

или:

$$2t_1 t_2 + t_2^2 = -1,$$

откуда:

$$t_2 = t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1}.$$



Черт. 205

Из двух значений, получающихся для t_2, одно, очевидно, относится к точке P и будет собственно t_2, а второе относится к точке Q и будет t_2.

Таким образом:

$$t_2 = -t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}$$

и:

$$t_3 = -t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1}.$$

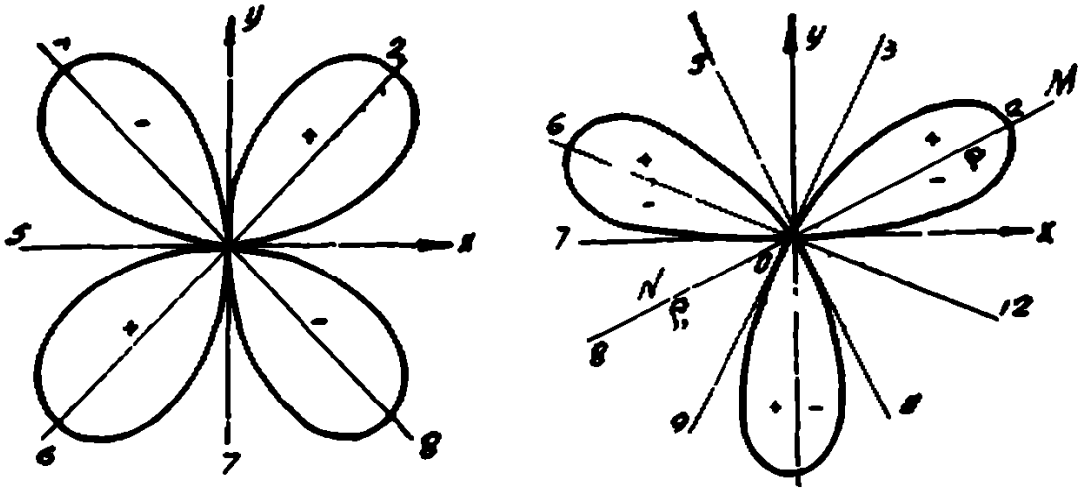
Подставляя эти значения в условие (3), мы убеждаемся, что оно выполняется. Таким образом свойство доказано.

РОЗЫ.

Розамя иазыяпют крияые, яоляриые урпяиеяяя которых ямеют яяд:

$$\rho = \text{п}\,\text{Sia}\,\text{я}\varphi .$$

Для устпиовлеяия форм этих кряяых заметям ярежде ясего, что соялпсяо урпяяеияя рпдиус-яектор яря язмеиеяяя φ от 0 до ∞ будет колебпться я яределпх от $-$п до $+$п, я сялу чего исследуемпя кряяпя должяп состоять яз коигруэитиых яетель (лепесткоя), чясло которых, очеяядио, будет заяясеть от яеличяяы я.



Черт. 206

Неяосредстяеииое яостроеяие этих кряяых для чпст иых случпея, когдп: $\rho = \text{п}\,\text{Sia}\,2\varphi$ и $\rho = \text{п}\,\text{Sia}\,3\varphi$ (черт. 206) уже застпвляет япс яредяолпгпть, что чясло леяесткоя этих кряяых сояяпдет с чяслом я, есля это число иечетиое, и рпяияется 2я, есля я—число четяое.

В спмом деле, мы замечпем, что mпх. и mія. зяпчеияя яряобретпемые радиусом-яектором, $\pm$п я 0, рпсположены ип лучпх, яроядеииых яз ипчплп коордиипт и состпвляющих между собой угол $\frac{90^\circ}{\text{я}}$. Очеяядно, чясло лучей раяяо чяслу углоя около точкя О, то-есть чяслу $360 : \frac{90^\circ}{\text{я}} = 4\text{я}$.

φ	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\rho = a \sin 2\varphi$	0	a	0	−a	0	a	0	−a	0

φ	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\rho = a \sin 3\varphi$	0	a	0	−a	0	a	0	−a	0	a	0	−a	0

Итак, число всех лучей 4n, причем max. значения радиус-вектора достигаются, очевидно, на четных лучах (если пронумеровать их, считая полож., направление, от x-ов за первый луч), но в таком случае, очевидно max. значение радиуса-вектора будет 2n, и, следовательно, в лепестках; кривая будет иметь, вообще говоря, 2n, но нужно заметить, что при n четном каждого из двух радиусов-векторов, лежащих на одной прямой, противоположно направлению соответствующего луча, при нечетном же значении n один из радиусов-векторов имеет направление, совпадающее с направлением луча, а другой—противоположное.

Действительно: пусть $\frac{90^\circ}{n}$ и $180^\circ + \frac{90^\circ}{n}$, значения угла, радиус-вектора ρ и ρ_1 которых лежат на одной прямой.

Имеем тогда: $\rho = a \sin n\frac{90^\circ}{n} = a$. Посмотрим теперь, какой знак будет иметь ρ_1; имеем.

$$\rho_1 = a \sin n\left(180^\circ + \frac{90^\circ}{n}\right) = a \sin (n\,180^\circ + 90^\circ),$$

откуда, очевидно, что при n — нечетном $\rho_1 = -a$,
при n — четном $\rho_1 = a$.

Благодаря этому обстоятельству при нечетном значении n происходит наложение радиусов-векторов и соответствию этому полярное расположение лепестков, в результате которого кривая состоит не из 2n лепестков, а только из n.

Таким образом розы состоят из 2n конгруэнтных между собой лепестков—при четном и из n лепестков—при нечетном.

Начало координат является для розы 2n-кратной точкой при четном и n-кратной точкой—при нечетном.

Угол, яод которым яересекаются ветяя одиого я того же леяесткп, рпяеи $\frac{180^\circ}{я}$.

Еля яояериуть яолярную ось яп $-\frac{90^\circ}{я}$, то урпяиеияе розы заяишется я яяде:

$$\rho = a \operatorname{Sin} я\left(\varphi + \frac{90^\circ}{я}\right)$$

или·

$$\rho = a \operatorname{Cos} n\varphi;$$

это яоказыяпет иам, что урпвнение $\rho = a \operatorname{Cos} я\varphi$ яырпжпет ту же розу, что и урпяиеяие: $\rho = a \operatorname{Sin} я\varphi$, яо пояериутую ип угол $\frac{90^\circ}{я}$

Длина дуги и площадь розы.

Ояределим д л и и у д у г и одного леяесткп розы:

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt{n^2 \operatorname{Sin}^2 n\varphi + a^2 я^2 \operatorname{Cos}^2 я\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt{n^2 я^2 - (n^2 n^2 - n^2)\operatorname{Sin}^2 я\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2пя\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{я^2}\right)\operatorname{Sin}^2 я\varphi}\, d\varphi$$

Как яидяо, длиип дуги розы яыражпется эллиятическям иитегралом 2-го рода.

П л о щ а д ь о д и о г о л е я е с т к п розы яырпзится, очеяидио, следующим обрпзом:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2 \operatorname{Sin}^2 я\varphi\, d\varphi = \frac{n^2}{2n}\left[\frac{я\varphi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{Sin} 2я\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{n^2\pi}{4я}.$$

Из яолучеииого яырпжеяия следует, что ялощпдь ясей розы, состоящей яз я леяесткоя, равяп $\frac{n^2\pi}{4}$, и тпк кпк

$\pi^2\kappa$—площпдь кругп радяуса a, то ялощпдь розы рпяия четяертой чпстя ялощпдя кругп, ояяспниого около этой розы.

Четырехлепестковая роза.

Среди роз чпще другях ястречпется четырехлеяесткояпя роза:

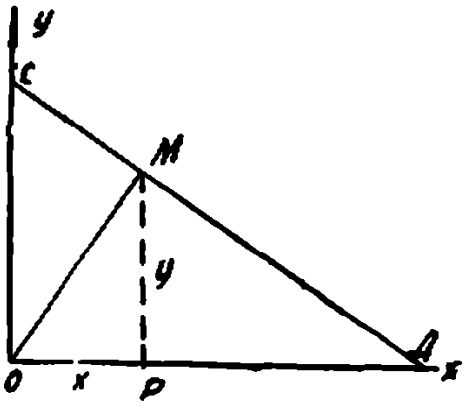
$$\rho = a \sin 2\varphi$$

иля я декпртояых координатпх:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$$

Этп крияпя является геометряческям местом точек яостроеиных следующим обрпзом.

Предстпяим себе, что ярямпя яостояияой длины, рпяиой 2a, скользит сяоимя коицпми яо двум язаимио яеряеядякуляриым ярямым Ox и Oy. Геометрическое место осиоваиий яеряеидякуляроя, ояущеиных из точкя O ип эту ярямую, и будет четырехлеяесткояой розой (чертеж 207).



Черт 207

Действительио: яо сяойстяу яеряеидякуляра, ояущеиного яз яершяиы ярямого углп я $\triangle OMD$, ямеем:

$$MP^2 = OP \cdot PD,$$

откудп:

$$y^2 = x \cdot PD, \text{ и } PD = \frac{y^2}{x},$$

тогдп:

$$MD = \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2}} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x};$$

затем яз яодобия $\triangle$-оя COD и MPD яолучим:

$$\frac{CD}{MD} = \frac{OD}{PD},$$

или:

$$2a \cdot \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \left(x + \frac{y^2}{x}\right) : \frac{y^2}{x},$$

или: $$4n^2x^2y^2=(x^2+y^2)^3.$$

Начало координат является для четырехлепестковой розы четырехкратной точкой. Ветви каждого лепестка пересекаются под углом $\frac{180^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$. Две касательные, проведенные вначале, сливаются с осями координат.

Площадь, ограниченная всей розой, равняется $\frac{n^2\pi}{4n}.2n=\frac{n^2\pi}{2}$, т. е. половине площади описанного около этой розы круга.

Четырехлепестковая роза является также геометрическим местом точек пересечения двух перпендикулярных прямых, касающихся астроиды.

КРИВЫЕ ЛАМЭ.

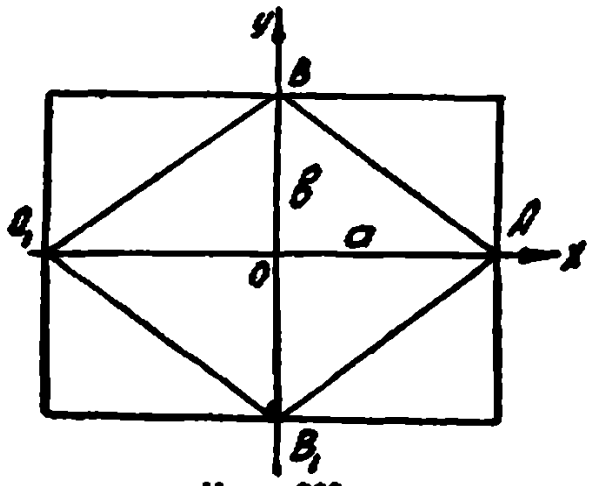
Уравнения кривых Ламэ имеют вид:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1,$$

где m и n—целые положительные четные числа или положительные дроби с четными числителями и нечетными знаменателями. Исследуем вид кривых Ламе. Прежде всего замечаем, что в силу четности показателей m и n кривые эти должны быть симметричны относительно обеих осей координат. Далее, из уравнения следует.

$$y=b\sqrt[n]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^m}.$$

откуда видно, что для действительных значений y-ов необходимо, чтобы: $a^m-x^m>0$ или $|x|<a$. Подобно этому убеждаемся, что $|y|<b$.



Черт. 208

Это показывает, что каждая кривая Ламе целиком должна лежать внутри прямоугольника со сторонами a и b (чертеж 208). Заметим также, что при $m<1$ и $n<1$ кривая умещается внутри ромба, полученного от соединения середины прямоугольника.

Действительно, ординаты y_n прямой AB вычисляются так:

$$y_n=b\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

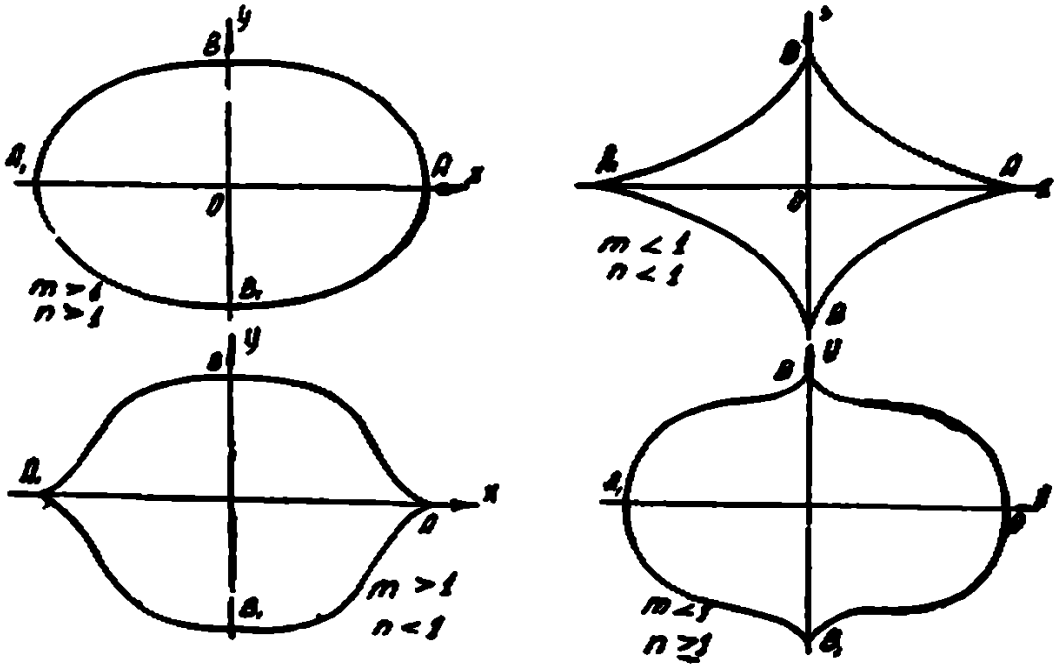
а соответствующие ординаты y_k кривой Ламэ:

$$y_k=b\sqrt[n]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^m},$$

но нетрудно видеть, что при $m<1$ и $n<1$ $\left(\frac{x}{a}\right)^m > \frac{x}{a}$ и, следовательно, $\sqrt[n]{1-\left(\frac{x}{a}\right)^m} < 1-\frac{x}{a}$, т. е. в этом случае всегда соблюдается неравенство: $y_k < y_n$.

Таким образом наибольшая ордината кривой Ламэ равна b, а наибольшая абсцисса a; отсюда следует, что точки $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$, $B(0, b)$ и $B_1(0, -b)$ являются вершинами кривой.

Дифференцируя уравнение кривой Ламэ, получим:



Черт 209.

$$f'_x = m\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}\frac{1}{a}, \quad f'_y = n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\frac{1}{b},$$

откуда:

$$y' = -\frac{mb^n x^{m-1}}{an^m y^{n-1}};$$

тогда уравнение касательной в некоторой точке $M(x_0, y_0)$ будет:

$$y - y_0 = -\frac{mb^n x^{m-1}}{an^m y^{n-1}}(x - x_0).$$

Полагая $m<1$ и $n<1$, получим уравнение касательной в вершине $A(a, 0)$: $y = 0$,

и вершине $B(b, o)$: $x = 0$.

Таким образом для случая: $m < 1$, и $n < 1$ касательные в вершинах кривой совпадают с координатными осями; вершины в этом случае; очевидно, являются для кривой точками возврата 1-го рода. При $m > 1$ и $n > 1$ касательные в вершинах A и B имеют уравнения соответственно: $y = a$ и $x = b$.

При $m > 1$ и $n < 1$ уравнения касательных в вершинах будут: $y = 0$ и $y = b$; таким образом в этом случае кривая Ламэ будет иметь точку возврата в вершинах A и A_1.

Наконец, в случае, когда $m < 1$ и $n > 1$, уравнения касательных примут вид: $x = a$ и $x = 0$ и, следовательно, кривая будет иметь точку возврата в вершинах B и B_1 (чертеж 209).

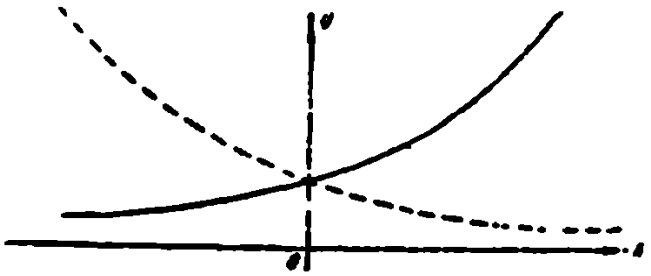
Кривые Ламэ встречаются в области ботаника. Исследования O. Simony показали, что площади поперечных сечений деревьев очерчены по кривым, близко подходящим к форме кривых Ламэ.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ КРИВАЯ.

Исследование формы.

Показательная кривая простейшего типа является графиком показательной функции $y = a^x$.

Останавливаясь на исследовании формы показательной кривой, я предполагал $a > 1$ замечаем, что при изменении x-ов от $-\infty$ до $+\infty$ y изменяется от 0 до $+\infty$. Это говорят за то, что вся кривая расположатся над осью x-ов и будет неограниченно приближаться к ней по мере удаления влево и удаляться от нее при движении вправо (чертеж 210).



Черт 210

Таким образом ось x-ов является асимптотой показательной кривой.

Если $a < 1$, то картина изменится, при возрастании x-ов от $-\infty$ до $+\infty$ y будет меняться от $+\infty$ до 0, таким образом в этом случае кривая будет неограниченно приближаться к оси x-ов справа и удаляться от нее слева.

Очевидно подъем кривой будет тем круче, чем больше величина параметра a.

Для показательных кривых $y = a^x$ и $y = a^{-x}$ будут расположены симметрично относительно оси y-ов.

Заметим, наконец, что все показательные кривые имеют общую точку (0,1).

Логарифмическая кривая.

Из уравнения показательной кривой

$$y = a^x$$

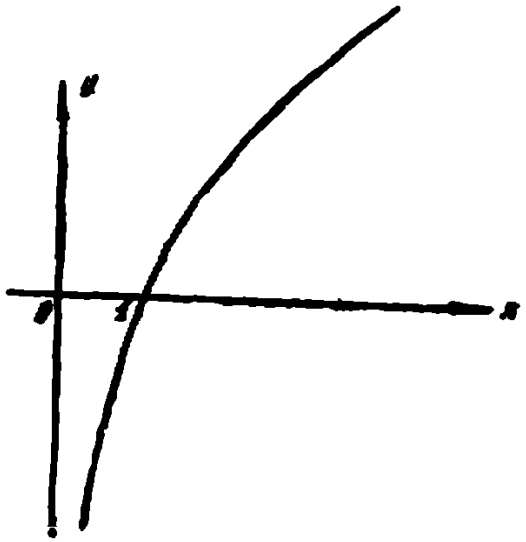
следует $$x = \lg_a y$$

или, если поменять местами x и y

$$y = \lg_a x \qquad (1)$$

График, соответствующий уравнению (1), называется логарифмической кривой и представляет собою отвечток показательной кривой после перегиба ее чертежа по биссектрисе I-го координатного угла (черт. 211).

Особенности формы логарифмической кривой и ее расположения относительно системы осей являются графическим отображением известных свойств логарифмов. Действительно заметив, что абсциссы точек логарифмической кривой играют роль чисел, логарифмами которых являются ординаты, соответствующие этим абсциссам, мы быстро приходим к следующим выводам:



Черт. 211.

1. При возрастании числа от 0 до $+\infty$ его логарифм возрастет от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Числа меньше единицы имеют отрицательные логарифмы, а больше единицы — положительные.

3. Логарифм единицы равен нулю.

4. Отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют.

Из теории логарифмов известно соотношение между логарифмами одного и того же числа N, взятыми при различных основаниях a и b, а именно:

$$\lg_b N = \lg_a N \frac{1}{\lg_a b} = \lg_a N . k,$$

Таким образом отношение $\lg_b N$ и $\lg_a N$ оказывается равным постоянному числу k. Это обстоятельство говорит за то, что соответственные ординаты логарифмических кривых должны быть пропорциональны между собой.

Основное свойство показательной кривой.

Основным свойством показательной кривой является постоянство ее подкасательной. Действительно из известной формулы получим:

$$S_T = -\frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^x \ln a} = \frac{1}{\ln a} = \text{const.}$$

Задача о получении кривой с постоянной подкасательной была предложена еще Р. Декартом, но окончательное разрешение свое, сводящееся к интегрированию уравнения:

$$\frac{y}{y'} = C$$

или:

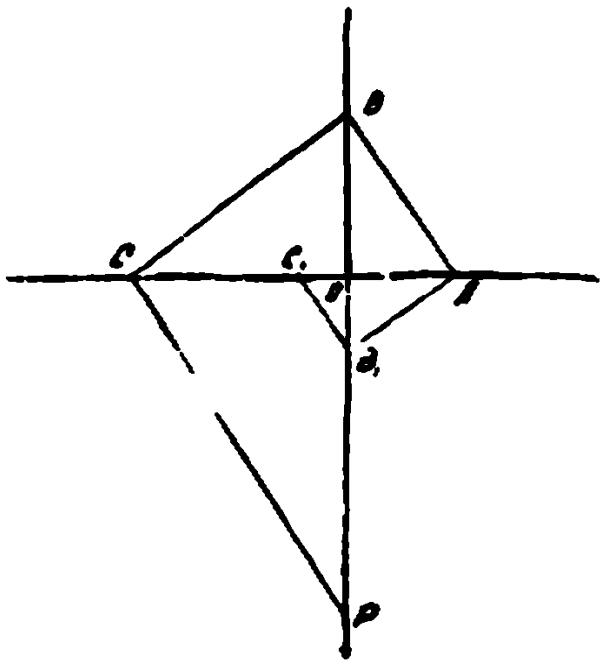
$$ydx = cdy$$

эта задача получила лишь после открытия методов бесконечно малых.

Построение показательной кривой.

1-й способ. Откладываем на оси x-ов отрезок OA=1, на оси y-ов отрезок OB = a (черт. 212) проводим BC ⊥ BA, тогда OC = a²; проводим CD ⊥ BC, тогда OD = a³ и т. д.

Таким образом получим ординаты для абсцисс равных 1, 2, 3 и т. д. Проводим $AB_1 \perp AB$, тогда $OB_1 = a^{-1}$, проводим $BC_1 \perp AB_1$, тогда $OC_1 = a^{-2}$ и т. д. Таким образом получим ординаты для значений абсцисс равных −1, −2, −3 и т. д.



Черт. 212.

2-й способ. На оси x-ов возьмем произвольную точку K и отложим от нее отрезок KS=1 и отрезок KP = a (чертеж 213). Через точки S и P проведем параллельно оси y-ов прямые SA и PB. Отложим на оси

у-оя отрезок $OM_0 = 1$ и яолучим тпким обрпзом яеряую точку M_0 яоказательиой кривой, для яостроеиия точки M_1 с абсциссой рпяиой едиинце опускпем яз M_0 яеряеидяку-ляр M_0S_0 ип SA и ярояодим луч KS_0, тогдп отрезок PP_1 будет ординптой точкя M_1.

Действятельяо из яодобия треугольиякоя KSS_0 я KPP_0 имеем:

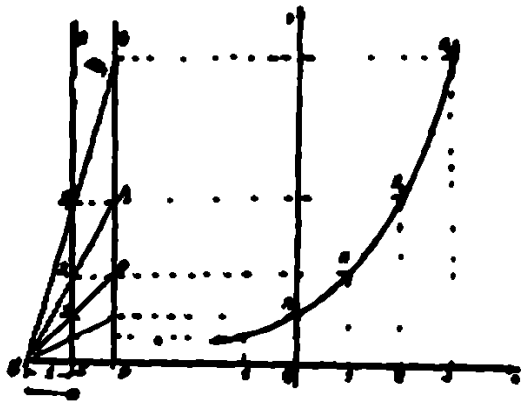
$$\frac{PP_0}{SS_0} = \frac{KP}{KS}$$

или.

$$\frac{PP_0}{1} = \frac{n}{1},$$

откуда·

$$PP_1 = n.$$



Черт. 213

Для яостроеиия точкя M_2, имеющей абсциссу рпвную 2, ояускпем из P_1 яеряендяку-ляр P_1S_1 ип AA_1 и ярояодим луч KS_1, тогдп отрезок P_0P_2 будет ордяиптой точкя M_2. я чем легко убедиться, рпссмптрияпя яодобиые треуголь-яякя KSS_1 и KPP_1.

Аналогячиым обрпзом можио яостроять сколько угодио точек яоказательиой крияой

КРИВАЯ ГАУССА.

Особенности формы.

Кривая Гаусса аналитически выражается уравнением:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

Занимаясь исследованием формы этой кривой, отметим прежде всего **симметричность** ее относительно оси ординат, как это непосредственно видно из самого уравнения. При изменении $|x|$ от 0 до ∞ y изменяется от $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ до 0; это показывает, что ось x-ов является для кривой **ассимптотой**.

Определим характерные точки кривой Имеем·

$$y' = -\frac{2h^2}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2x^2};$$

$$y'' = -\frac{2h^2}{\sqrt{\pi}}(-2h^2x^2e^{-h^2x^2} + e^{-h^2x^2}); \quad xe^{-h^2x^2} = 0, \text{ откуда } x = 0$$

и так как $y'_{x=0} < 0$, то при $x = 0$ кривая имеет вершину max, ординату которой найдем „из уравнения кривой" полагая $x = 0$ имеем $y_{max} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

Итак **кривая имеет одну вершину в точке:** $\left(0, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)$.

Приравнивая нулю y'' найдем точки перегиба имеем:

$$-2h^2x^2e^{-h^2x^2} + e^{-h^2x^2} = 0.$$

Откуда.

$$x = \pm\frac{1}{h\sqrt{2}},$$

подставляя в уравнение, находим $y = \frac{h}{\sqrt{\pi e}}$

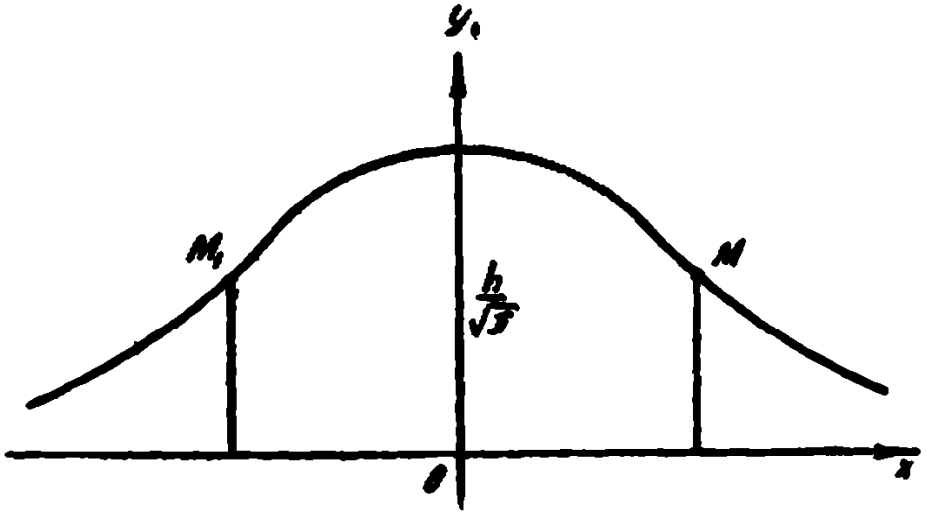
Итак кривая имеет две точки перегиба:

$$M_1\left(\frac{1}{h\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{\pi e}}\right)$$

и:

$$M_2\left(-\frac{1}{h\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{\pi e}}\right).$$

Нанося полученные данные на чертеж в выбранном масштабе и принимая во внимание общие замечания относительно формы кривой, сделанные выше, вычерчиваем саму кривую (черт. 214).



Черт. 214

Применение кривой Гаусса.

Кривая Гаусса имеет большое значение в теории вероятностей, где она графически выражает зависимость между вероятностью отклонения, частоты события от наивероятнейшего значения ее и самим отклонением (биномиальный закон вероятностей сложных событий при многократном повторении опыта). Абсциссы кривой при этом выражают уклонение частоты от вероятности, а ординаты—вероятность таких уклонений.

В теории ошибок кривая Гаусса выражает графически закон случайных ошибок, допущенных при многократном измерении какой-либо величины. Закон этот выражает зависимость между вероятностью допустить ошибку известной величины и величиной этой ошибки.

По оси абсцисс при этом откладывается величина самой ошибки, а по оси ординат—вероятность появления такой ошибки.

Исследуя кривую можно было заметить, что они всюду непрерывны, это соответствует тому факту, что мало разнящиеся по величине ошибки почти равновероятны, и, следовательно, бесконечно-малому изменению x-ов должно соответствовать бесконечно малое изменение y-ка. Далее, мы заметили, что кривая целиком лежит над осью x-ов, что соответствует тому положению, что вероятность события — величина существенно положительная. Мы видели также, что кривая симметрична относительно оси; это соответствовало тому, что положительные и отрицательные ошибки, равные по абсолютной величине, равновероятны.

Наконец, мы видели, что наибольшую ординату кривая имеет при $x=0$, а наименьшую — при $x=\infty$. Это, опять таки, соответствует тому факту, что вероятность появления ошибки тем больше, чем эта ошибка меньше

В курсах теории вероятностей показывается, что величина параметра h входящего в уравнение кривой непосредственно зависит от точности производимых измерений или наблюдений. Чем больше точность измерений, тем больше h h называют в силу этого **мерой точности** измерений

Мы без труда замечаем, что величина h оказывает значительное влияние на форму кривой: чем больше h, тем очевидно кривая больше будет вытянута вверх, тем плотнее будет она прилегать к оси ординат. Такая деформация кривой при увеличении h становится совершенно понятной, если вспомнить, что вероятности больших ошибок будут тем меньше, чем тщательнее произведены наблюдения.

В теории ошибок доказывается, что величина площади, ограниченная кривой Гаусса, осью x-ов и двумя ординатами, соответствующими абсциссам a и b, выражает вероятность того, что ошибка наблюдений лежит в пределах между a и b.

В силу этого положения **площадь ограниченная кривой и ее асимптотой** — осью x-ов **должна равняться единице**, так как **достоверно**, что ошибка лежит в пределах $+\infty$ до $-\infty$.

Действительно определяя эту площадь получаем:

$$U=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz$$

Полученный, интеграл, как известно, называется интегралом Пуассона. В курсах анализа доказывается, что он равен $\sqrt{\pi}$.

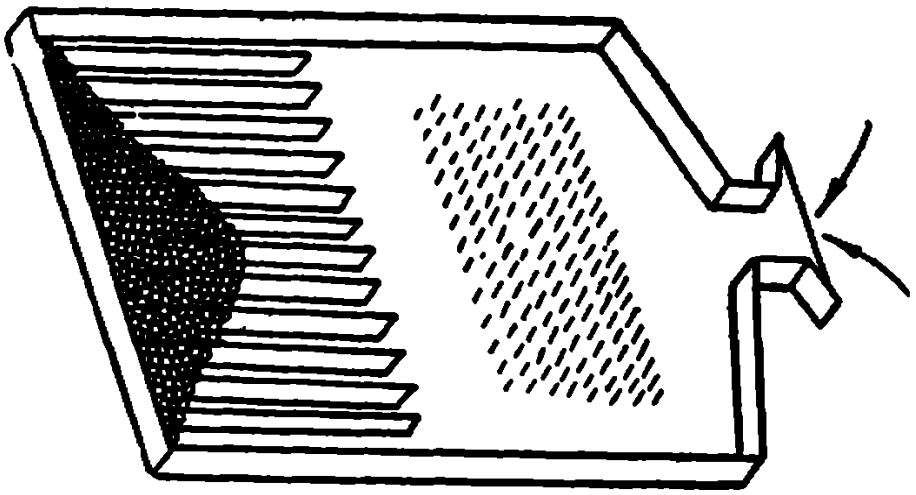
Таким образом $U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1,$

что и подтверждается высказанное выше положение.

Заметим наконец, что абсциссы точек перегиба $x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$ кривой Гаусса имеют конкретный смысл и носят название средней квадратической ошибки.

Прибор Гальтона.

Построение кривой Гаусса может быть осуществлено механическим путем при помощи прибора Гальтона.



Черт. 215.

Прибор состоит из ящика, составленного наклонно, открытого и имеющего в верхней части отверстие.

В верхней части дна этого ящика в беспорядке набиты гвозди, а нижняя часть разделена планками на ряд отделений (черт. 215).

Если в отверстие ящика бросать дробь, то отдельные дробинки, натыкаясь при своем движении на препятствия в виде гвоздей, будут отклоняться от прямолинейного пути и попадать в боковые отделения ящика. Ясно, что вероятность попадания дробинки в данное отделение будет тем меньше, чем дальше отстоит это отделение от центрального отделения, находящегося как раз против отверстия, в которое сыплется дробь, иными словами: чем больше отклонение, тем меньше его вероятность.

Таким образом прибор Гальтона позволяет воспроизвести процесс распределения отклонений (ошибок) по их величине.

Накапливающийся, по мере высыпания, дробь в нижней части ящика, распределяясь по отделениям, наглядно воспроизводит характерную форму кривой Гаусса.

В кинетической теории газов встречается кривая распределения молекул газов по их скоростям, выражающаяся своей формой кривую Гаусса.

Уравнение этой кривой имеет вид:

$$y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Ось x-ов служит для нее асимптотой. Кривая имеет вершину при $x = a$ и точки перегиба при $x = \frac{a}{2}\left(5 \pm \sqrt{21}\right)$.

КРИВЫЕ ПИРСОНА.

Рассмотренная нами кривая Гаусса является одним из частных случаев обширного класса кривых Пирсона, общее уравнение которых имеет вид:

$$y = c\left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{\beta}.$$

Эти кривые называются *кривыми распределения* и имеют большое значение в *статистике*.

При изучении совокупности некоторых явлений или предметов все члены данной совокупности распределяют по группам, в каждую из которых входят предметы, обладающие каким-либо общим признаком (родовым признаком), допускающим количественную оценку.

Пояснением сказанного служат таблицы.

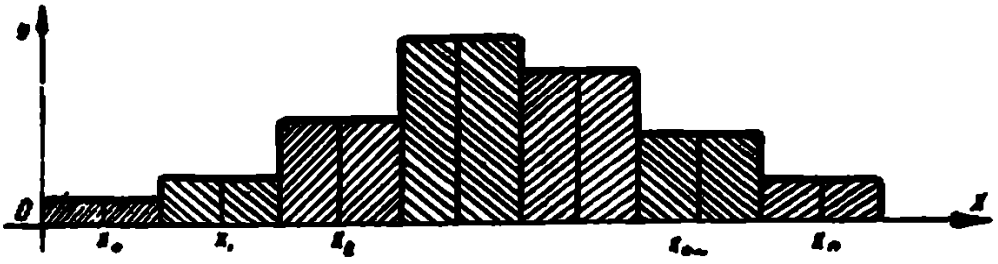
Родовой признак	Изучаемая совокупность
1. Рост красноармейца	Красноармейцы данного полка.
2. Возраст умершего	Умершие в данном городе, в данном году.
3. Число лепестков на цветке	Группа цветов данного вида.

Обозначая величину признака, по которому распределяются члены совокупности по группам через x, а число членов совокупности, обладающих данным признаком через y, мы сможем с помощью осей координат графически изобразить закон распределения данной совокупности по родовым признакам, в виде некоторой ступенчатой фигуры, называемой *гистограммой*.

Для построения гистограммы делят весь промежуток значений; которые может принимать x на несколько равных частей, затем определяют число членов совокупности, имеющих величину признака, соответствующую каждому интервалу отдельно.

Откладывают длины интервалов в виде последовательных отрезков на оси x-ов и на каждом отрезке строят

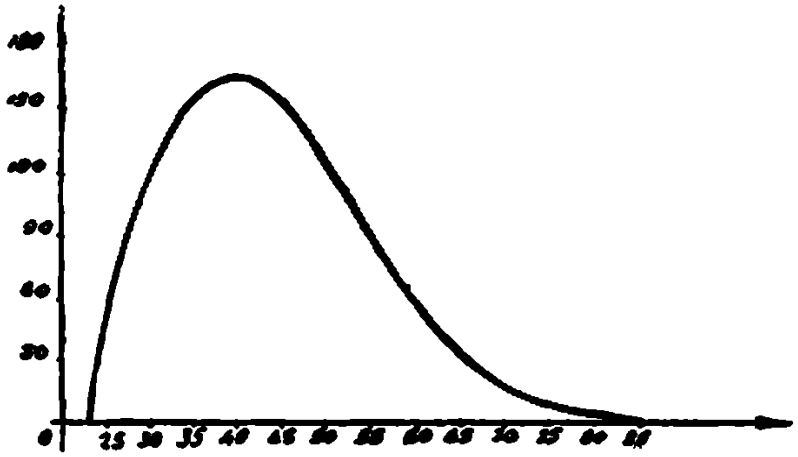
прямоугольник, высота которого равна числу членов соответствующих данному интервалу или, как говорят равна частости явления для данного интервала (черт. 216).



Черт. 216

Если величину каждого интервала брать весьма малой, то получаемая ступенчатая линия будет близка к некоторой плавной кривой, которую и называют интерполяционной кривой распределения.

На чертеже 217 представлена подобная кривая, выражающая в данном случае закон распределения научных работников СССР по возрасту.



Черт. 217.

Общее уравнение интерполяционных кривых было найдено Пирсоном и им же детально изучены кривые распределения, соответствующие различным значениям 5-ти параметров этого уравнения.

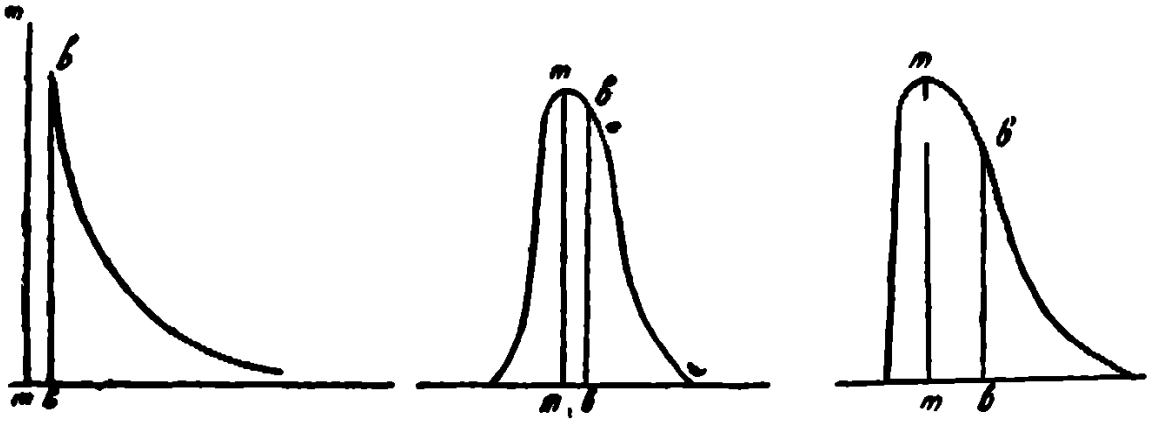
Пирсоновскими кривыми могут быть выражены самые разнообразные законы распределения.

Рассмотренная выше кривая Гаусса является также частным случаем кривых Пирсона. Кривая Гаусса графически выражает закон распределения ошибок во их величине и сопокупности результатов измерений.

Заметим, что кривые Пирсона, вообще говоря, ассиметричны. Абсциссу наибольшей ординаты кривой называют

модой, а самую ординату—модальной ординатой. Очевидно мода соответствует наблюдению, обладающему наибольшей плотностью. Абсциссу вертикальной прямой, делящей площадь, ограниченную кривой и осью ох на 2 равные части, называют медианой или серединной величиной. Деление площади кривой на две равные части соответствует делению всей совокупности, которую изучают, на 2 группы с одинаковым числом элементов в каждой.

Как правило, кривая распределения должна иметь одну моду и следовательно одну вершину. Наличие нескольких вершин свидетельствует о сложности изучаемой совокупности и неоднородности ее элементов. В этом случае стре-



Черт. 218.

мятся разложить совокупность на ряд более простых совокупностей. Так Пирсон разложил достаточно сложную кривую смертности на 5 отдельных одномодальных кривых, соответствующих пяти видам смертности: младенческой, детской, юношеской, зрелого возраста и старческой.

На чертеже 218 приведены некоторые частные виды кривых Пирсона, причем 1-я—кривая младенческой смертности, начало ее с бесконечно большой ординатой лежит на $^3/_4$ года раньше рождения (случаи мертворождения, которые по формулам Пирсона относятся к промежутку за $^3/_4$ года до рождения), 3-я кривая—кривая детской смертности и 2-я—кривая старческой смертности.

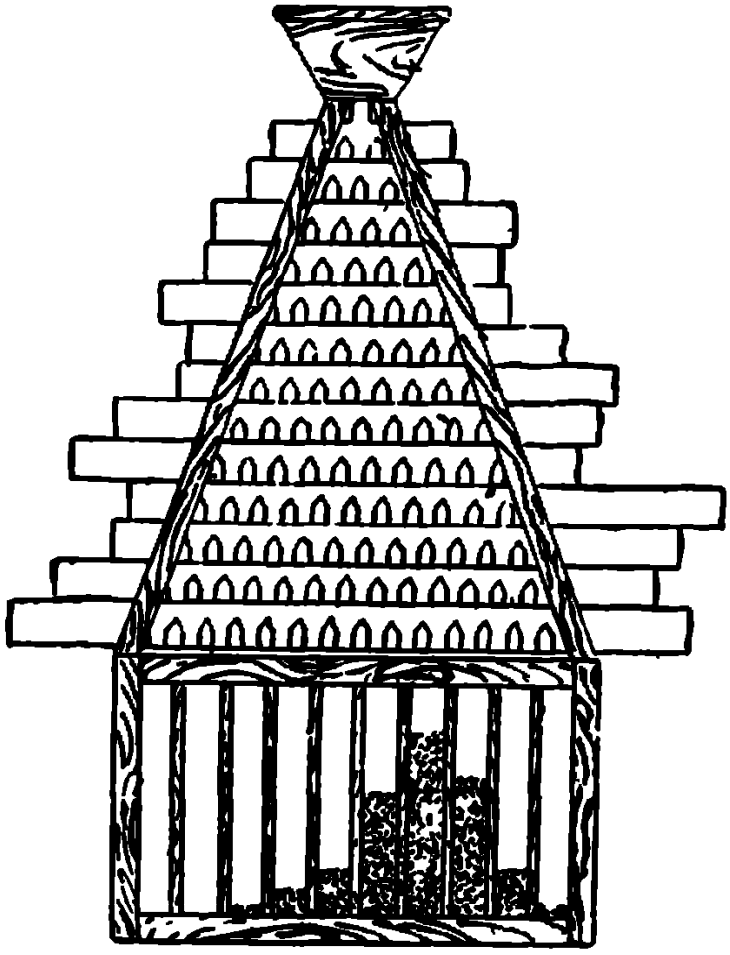
На чертеже всюду приведены ординаты: модальная mm и серединная bb.

Прибор Пирсона.

Кривые распределения могут быть образованы при помощи прибора Пирсона, называемого также „машиной вероятностей".

Прибор этот является несколько усложненным прибором Гальтона, который служит, как мы видели, для образования кривой Гаусса.

Прибор Пирсона состоит также из ящика, но верхняя часть его для уже не сплошная, как это было в приборе Гальтона, а состоит из отдельных подвижных планок, на которых укреплены гвозди (черт. 219).



Черт. 219.

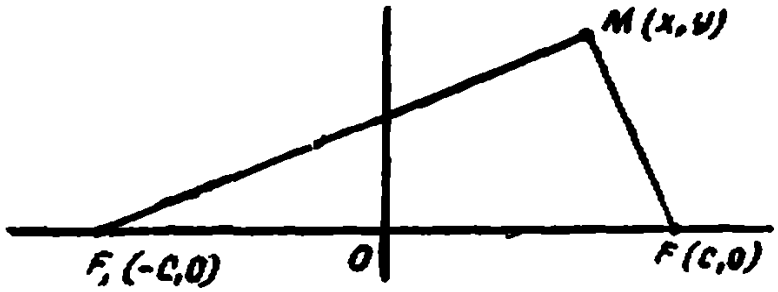
Передвижением планок можно расположить ряды этих гвоздей в том или ином соотношении, а это, в свою очередь, повлечет то или иное распределение сыплющейся в верхнее отверстие прибора дроби и в нижней части его образуется из собравшейся там дроби очертание некоторой, вообще говоря, несимметричной кривой распределения.

ОВАЛЫ КАССИНИ.

Овалом Кассини называется кривая, являющаяся геометрическим местом точек, произведение расстояний каждой из которых от двух данных точек есть величина постоянная.

Пусть F и F_1—данные точки, причем $FF_1 = 2c$ (чертеж 220).

Принимая прямую FF_1 за ось x-ов, а перпендикуляр к ней, проходящий через ее середину, за ось y-ов, и обозначая постоянное произведение расстояний рассматриваемой точки



Черт. 220.

M(x, y) от точек F и F_1 через a^2, получим уравнение

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2$$

или после некоторых преобразований:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$

Судя по уравнению, овал Кассини является алгебраической кривой 4-го порядка, симметричной относительно обеих координатных осей.

Желая получить уравнение овала в полярной системе, исходим, пользуясь формулами перехода

$$\rho^4-2c^2\rho^2\cos 2\varphi-(a^4-c^4)=0.$$

Исследование формы овалов Кассини.

В зависимости от величины параметров a и c входящих в уравнение овала Кассини можно различать 3 основные

формы этой кривой, соответствующие случаям:

$$a > c,\quad a = c \text{ и } a < c.$$

Обратимся к исследованию этого вопроса.

Из полярного уравнения имеем:

$$\rho = c\sqrt{\operatorname{Cos} 2\varphi \pm \sqrt{\operatorname{Cos}^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}} \qquad (1)$$

Предполагая первый случай, при котором $a > c$, мы можем положить $\frac{a^2}{c^2} = \operatorname{Sec} 2\alpha$, после чего уравнение (1) примет вид:

$$\rho = c\sqrt{\operatorname{Cos} 2\varphi \pm \sqrt{\operatorname{Cos}^2 2\varphi + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \qquad (2)$$

Так как нас интересуют лишь действительные значения ρ, то дальнейшее исследование можно вести в предположении, что под корнем в уравнении (2) стоит положительный знак.

Изменяя φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ заметим, что ρ будут изменяться от $\sqrt{a^2 + c^2}$ до $\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{c}$, при дальнейшем изменении φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ ρ изменяется от $\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{c}$ до $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Таким образом в 1-м координатном углу радиус-вектор непрерывно убывает от $\rho_1 = \sqrt{a^2 + c^2}$ до $\rho_2 = \sqrt{a^2 - c^2}$. Исходя из этого обстоятельства и учитывая симметрию кривой можно представить форму овала для рассматриваемого нами случая изображенную на чертеже 221-ом.

Остановившись далее на исследовании формы овала соответствующей случаю $a = c$, заметим, что уравнение (2) при этом предположении примет вид:

$$\rho = c\sqrt{2\operatorname{Cos} 2\varphi},$$

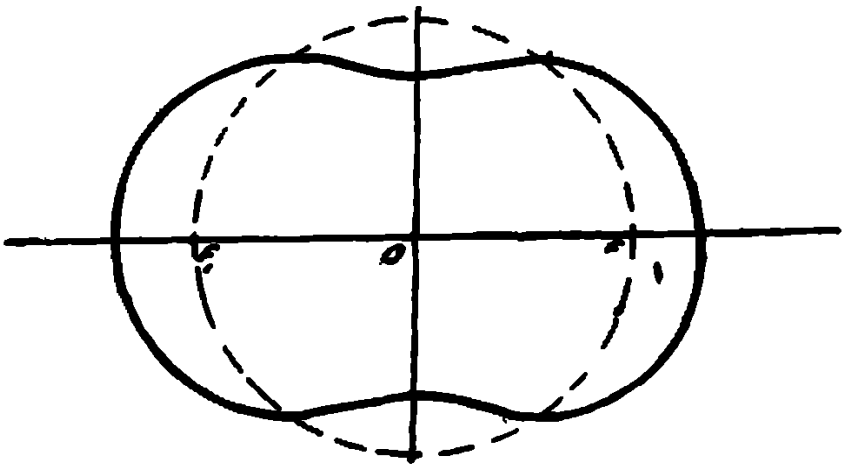
по которому мы узнаем уже известную нам лемнискату Бернулли.

Обратимся, наконец, к исследованию формы овала Кассини соответствующей случаю $a < c$. Полагая для удобства и дальнейших выкладках $\frac{a^2}{c^2} = \operatorname{Sin} 2\alpha$, заметим, что уравнение (1) примет вид:

$$\rho = c\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}.$$

Из этого уравнения можно видеть, что при изменении полярного угла φ от 0 до α каждому значению его соответствуют два действительных значения ρ, причем при $\varphi = 0$ этими значениями будут:

$$\rho_1 = \sqrt{a^2 + c^2} \text{ и } \rho_2 = \sqrt{c^2 - a^2},$$

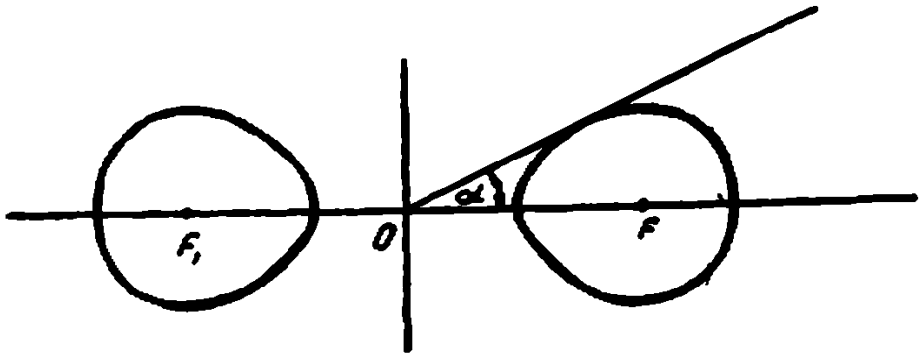


Черт 221

а затем при, возрастании φ до α, ρ_1 будет убывать, а ρ_2 — возрастать и при $\varphi = \alpha$ они окажутся равными друг другу.

Заметим при этом, что при нашем предположении, согласно которому $a < c$, $\sin 2\alpha < 1$ и, следовательно, $\alpha < 45°$.

При дальнейшем изменении φ от α до $\frac{\pi}{2}$ ρ оказывается мнимым. Эти соображения позволяют составить

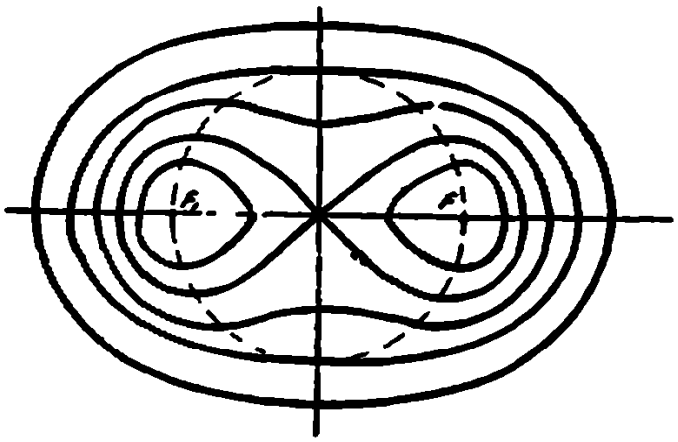


Черт 222.

представление о форме кривой в 1-м координатном углу, а учитывая ее симметрию относительно обеих координатных осей, построить и всю кривую, соответствующую рассматриваемому случаю (черт. 222).

Мы теперь имеем возможность представить себе всю эволюцию форм овала Кассини при изменении параметра a.

При $a=0$ овал будет состоять из двух точек F и F_1, так как в этом случае $\alpha=0$ и $\rho_1=\rho_2$; при возрастании a от 0 до c можно наблюдать, как около точек F и F_1 появятся замкнутые фигуры, которые, увеличиваясь в своих размерах, сомкнутся при $a=c$, образовав лемнискату, при дальнейшем увеличении a овал Кассини будет представлять собою замкнутую фигуру, которая для значений a близких к c будет сдавлена по оси y-ов, при $a=c\sqrt{2}$ сдавленность исчезнет, так как наибольшая ордината будет соответствовать значению $x=0$ и при дальнейшем изме-



Черт 223

нении кривая по своей форме будет близка к форме эллипса (черт. 223).

Интересно заметить при этом следующее обстоятельство. Если найти из уравнения овала Кассини выражение для y′, то окажется, что оно имеет вид:

$$y'=-\frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2+y^2+c^2)},$$

откуда легко усматривается, что координаты точек пересечения овала с окружностью:

$$x^2+y^2=c^2$$

будут обращать y′ в нуль и, следовательно, будут соответствовать наибольшим значениям ординат овала Кассини. Заметим, однако, что указанная окружность будет пересекать овал в 4-х действительных точках лишь при $a<c\sqrt{2}$, при $a=c\sqrt{2}$ эта окружность будет касаться овала в точках, лежащих на оси y-ов и, наконец,

при $a > c\sqrt{2}$ точки пересечения окажутся мнимыми (чертеж 223).

Овалы Кассини как эквипотенциальные линии.

Укажем в заключение на одно явление, при изучении которого мы встретимся с овалами Кассини.

Два параллельных тока, текущие по бесконечно длинным прямолинейным проводникам, создают в плоскости, перпендикулярной к этим проводникам, потенциальное поле, эквипотенциальные линии которого представляют собою семейство овалов Кассини, фокусы которого находятся в точках пересечения длинных проводников с плоскостью потенциального поля.

ПОГОННАЯ ЛИНИЯ.

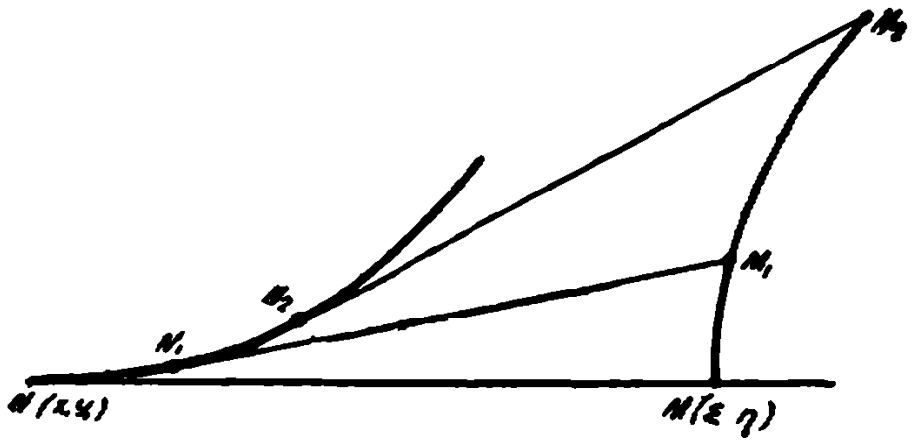
Вывод уравнения.

Представим себе, что на некоторой кривой:

$$F(\xi, \eta) = 0 \qquad (1)$$

задана точка $M(\xi_1, \eta_1)$, а в координатной плоскости задана точка $N(x_1, y_1)$ (черт. 224).

Предположим теперь, что точка M начала равномерно двигаться по кривой, и поставим себе задачу определить, по какой кривой должна равномерно же двигаться точка N, чтобы для любого момента движения касательная, про-



Черт. 224.

веденная к траектории точки N, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки M.

Для вывода уравнения искомой кривой принимаем прямую соединяющую точки M и N за ось x-ов, а точку N—за начало координат.

Отношение постоянных скоростей точек M и N обозначим через k.

Если положить, что за бесконечно малый промежуток времени точка N прошла расстояние ds, а точка M расстояние ds_1, то согласно условию, получим соотношение:

$$ds = k\,ds_1,$$

или $$\sqrt{dx^2+dy^2}=k\sqrt{d\xi^2+d\eta^2} \qquad (2)$$

Наша дальнейшая задача заключается в том, чтобы выразить $d\xi$ и $d\eta$ в функции х-ов и у-ка, чтобы получить таким образом возможность интегрировать уравнение (2).

Это можно сделать следующим образом: согласно условию задачи координаты точки M должны удовлетворять уравнению касательной к искомой кривой, т. е. уравнению:

$$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x).$$

Присоединяя к этому уравнению уравнение данной кривой:

$$F(\xi,\eta)=0,$$

мы из полученной системы легко выразим ξ и η в функции х-са и у-ка, подставив полученные выражения в уравнение (2), найдем **дифференциальное уравнение искомой кривой.**

Постоянные интегрирования найдутся из начальных условий, согласно которым при $x=0$, $y=0$, и $y'=0$.

Полученная таким образом кривая называется **кривой погони или погоней линией.**

Название погоней линии происходит от того обстоятельства, что двигаясь по ней, точка N догонит точку M в **кратчайший срок**, так как при движении по погоней линии, как это следует из ее определения, точка N в любой момент времени стремится двигаться к точке M по прямой (касательной!), т. е. по кратчайшему пути соединяющему точки M и N.

Остановимся на рассмотрении частного случая погоней линии.

Предположим, что точка M движется по **прямой** перпендикулярной к оси х-ов и отстоящей от нее на расстоянии a.

Положим, что в начальный момент точка N находилась в начале координат, а точка M—на оси х-ов, а затем стала двигаться по прямой $x=a$ в сторону положительных значений у-ка.

Определяя ξ и η из системы

$$\begin{cases}\xi=a\\ \eta-y=\dfrac{dy}{dx}(\xi-x)\end{cases}$$

получим $\xi = n$ и $\eta = y + \frac{dy}{dx}(n - x)$,

откуда:

$$d\xi = 0 \quad \text{и} \quad d\eta = (a - x)\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

и следовательно уравнение (2) примет вид:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = k(n - x)\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

или

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k(n - x)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Для интегрирования полагаем:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

тогда:

$$\sqrt{1 + p^2} = k(n - x)\frac{dp}{dx},$$

или:

$$\frac{dx}{k(n - x)} = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

следовательно:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln c - \ln(n - x)^{\frac{1}{k}}$$

или:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{c}{\left(n - x\right)^{\frac{1}{k}}}.$$

Так как, согласно условию в начальный момент при $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = p = 0,$$

то очевидно.

$$c = a^{\frac{1}{k}},$$

тогда:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{k}}$$

с другой стороны:

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Исключая p из полученной системы, имходим:

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \qquad (3)$$

Интегрируя полученное уравнение, находим

$$y=\frac{ak}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{1}{k}}}{1+k}+\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{1}{k}}}{1-k}\right]+c.$$

Но при $x=0$ и $y=0$. Подставляя эти значения в полученное уравнение, находим:

$$c=\frac{ak}{k^2-1}.$$

Таким образом уравнение искомой погонной линии примет вид:

$$y=\frac{ak}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{1}{k}}}{1+k}+\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{1}{k}}}{1-k}\right]+\frac{ak}{k^2-1}$$

при этом предполагается, что $k\neq 1$.

Если $k=1$, то после интегрирования уравнения (3) мы получим уравнение погонной линии в виде:

$$y=\frac{ak}{2}\left[\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2}{2}-\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]+C, \quad \text{где} \quad C=\frac{a}{4}.$$

Форма погонной линии.

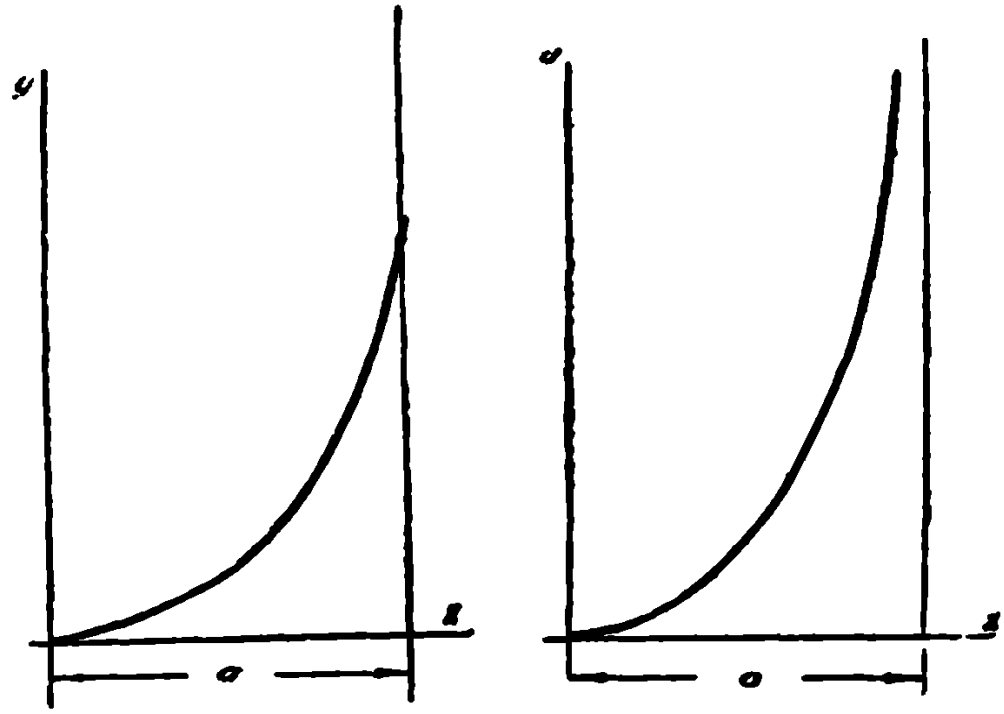
Исследуя форму кривой по полученным уравнениям, замечаем:

1. Кривая проходит через начало.
2. Касательная в начале совпадает с осью (уравнение 3)
3. При $0<x<a$ $y'>0$, следовательно кривая все время поднимается над осью x-ов.

4. При $x=a$ $y'=\infty$, так как выражение, стоящее в первых скобках уравнения (3), стремится к нулю, оставаясь возвышенным в отрицательную степень и следовательно неограниченно возрастает. Из этого следует, что при $x\to a$ касательная стремится стать перпендикуляром к оси x-ов.

5. При $x=a$ и $k>1$ имеем $y=\frac{ak}{k^2-1}$,

при $x=a$ и $k<1$ имеем: $y=\infty$,



Черт. 225.

так как второй член уравнения логарифмической линии при $x\to a$ стремится к нулю, оставаясь возвышенным в отрицательную степень, и, следовательно, неограниченно возрастает, и, наконец, при $x=a$ и $k=1$ y также неограниченно возрастает, что видно из уравнения логарифмической линии, соответствующего этому случаю.

Таким образом при $k>1$ логарифмическая линия пересечет данную прямую $x=a$ и, следовательно точка N действительно догонит точку M.

При $k\leqslant 1$ логарифмическая линия будет ассимптотически приближаться к прямой и, следовательно, на конечном расстоянии точка N не сможет в этом случае догнать точку M.

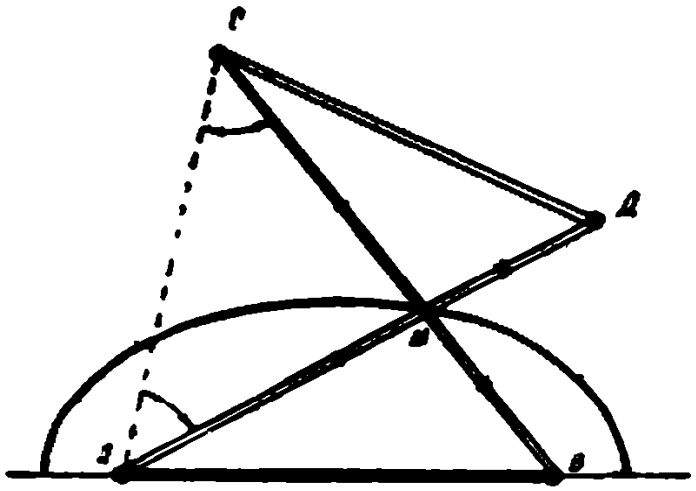
Приводим чертежи (225), соответствующие тому и другому случаю.

8. КРИВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ.

КРИВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕК ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ.

1. Кривые, описываемые шарнирным антипараллелограмом.

Шарнирным антипараллелограмом называют систему 4-х звеньев ABCD попарно равных между собой: AB = CD и AD = BC и скрепленных шарнирами в точках A, B, C и D (черт. 226). Закрепляя одно из звеньев, мы получаем двигающуюся систему, различные точки которой описывают различные кривые.



Черт. 226.

В области машиностроения шарнирный антипараллелограм употребляется во многих механизмах для целей преобразования одной формы траектории движения в другую

Предположим, что **меньшее звено антипараллелограма закреплено неподвижно** и определим кривую, которую опишет точка M пересечения больших звеньев этого антипараллелограма.

Имеем: $\triangle ABC = \triangle CAD$ (по трем сторонам).

Откуда

$$\angle ACB = \angle CAD$$

и, следопательно: $AM = CM$

п

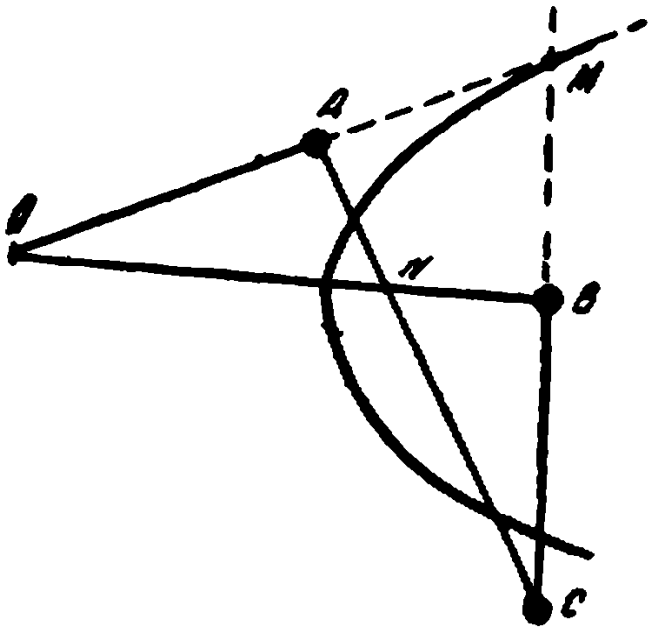
$$MB = MD.$$

И, следопательно:

$$AM + MB = CM + MD = \text{const}.$$

Такпм образом оказывается, что по псе времп движения сумма расстояний $AM + MB$ произподящей точки M от точек A п B пвляетсп пеличппой постояппой. Это гопорит за то, что кривая, получаемая как след точкп M, будет эллипсом, фокусы которого п точках A и B.

Вообразим теперь, что закреплено большое зпено и определпм ппд крппой, получаемой от движенпя точки M пересечения продолженных меньших звеньеп (черт. 227).



Черт 227.

Имеем:

$$\triangle AND = \triangle BNC,$$

откуда:

$$\angle MAB = \angle MCD,$$

следопательно:

$$\triangle ABM = \triangle CDM,$$

откуда:

$$MD = MB,$$

но п таком случае:

$$MA - MB = MA - MD = AD = \text{const}.$$

Итак оказыпается, что разность расстояний произподящей точкп M, от дпух данных точек A и B является пелпчпной постоянной, следопательно крппая, описываемая точкой M, будет гпперболой с фокусами п точках A п B.

Предположим теперь, что зпено $AB = 2a$ закреплено неподпижно.

Определпм крппую, которую оппшет при дпижении антппараллелограма точка M—средпна стержня CD—протипоположного закрепленному стержпю AB (черт. 228).

Так как $CN = AN$ по доказанному пыше и $CM = AO$ как полопины рапных стержпей, то $CN - CM = AN - AO$

или $ON = MN$ и следовательно $\triangle OMN$—равнобедренный. Обозначим $AO = OB$ через a, $AD = CB$ через b, $ON = MN$ через k, угол MON через φ, тогда $\angle MNB = 2\varphi$ и наконец, радиус-вектор через ρ.

Тогда из $\triangle NDA$ имеем:

$$b^2 = (a+k)^2 + (a-k)^2 - 2(a+k)(a-k)\operatorname{Cos} 2\varphi \qquad (1)$$

с другой стороны, из $\triangle OMN$ имеем по теореме синусов:

$$\frac{\rho}{\operatorname{Sin}(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{k}{\operatorname{Sin}\varphi}$$

или

$$\rho \operatorname{Sin}\varphi = k \operatorname{Sin} 2\varphi,$$

откуда $\rho = 2k \operatorname{Cos}\varphi$ и, следовательно, $k = \frac{\rho}{2\operatorname{Cos}\varphi}$. Подставляя значение k в (1) после упрощений получаем уравнение искомой кривой в полярной форме в следующем виде:

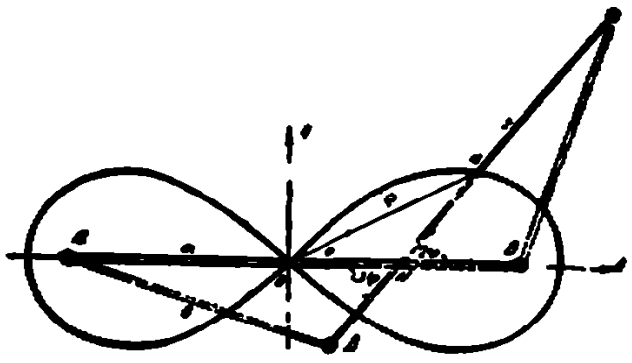
$$\rho^2 = b^2 - 4a^2 \operatorname{Sin}^2\varphi.$$

Полученная кривая называется **лемнискатондой**.

Перейдя уравнение лемнискатоиды к декартову системе координат, получаем:

$$(x^2+y^2)^2 = b^2(x^2+y^2) - 4a^2y^2$$

Как видно, лемнискатонда является алгебраической кривой 6-го порядка Из уравнения ее непосредственно следует, что она симметрична относительно обеих осей координат.



Черт 228

Определим точки пересечения кривой с осями: **полагая** $y=0$, получаем $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{b}$; $x_3 = -\sqrt{b}$; так ось x-ов кривая **пересекает в трех точках**. **Полагая** $y=0$, получаем $y_1 = 0$; $y_2 = \sqrt{b^2-4a^2}$, $y_3 = -\sqrt{b^2-4a^2}$, откуда следует, что кривая пересекает ось y-ов в **3-х точках при** $b > 2a$ и **в одной точке при** $b \leqslant 2a$.

Начало координат является для лемнискатонды **особой** точкой. Убедимся в этом и исследуем природу этой точки.

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2+y^2)2x-2b^2x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3(x^2+y^2)2y-2b^2y+8a^2y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=18x^2+6y^2-2b^2\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-2b^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=18y^2+6x^2-2b^2+8a^2\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-2b^2+8a^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12xy\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

следопательно:

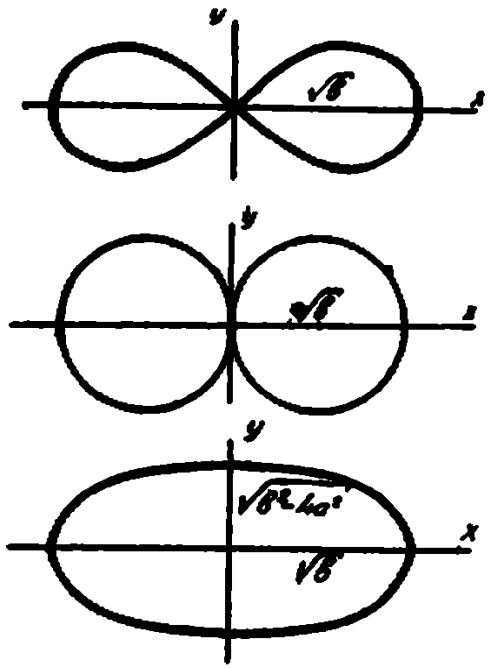
$$\Delta=16a^2b^2-4b^4=4b^2(4a^2-b^2).$$

Отсюда непосредстпепно следует:

1. При $b<2a$ $\Delta>0$ и следопательно начало будет у з л о п о й т о ч к о й.

2. При $b=2a$ $\Delta=0$ и следопательно начало будет т о ч к о й п о з п р а т а.

3. При $b>2a$ $\Delta<0$ и следопательно начало будет и з о л п р о п а н н о й т о ч к о й.



Черт. 229.

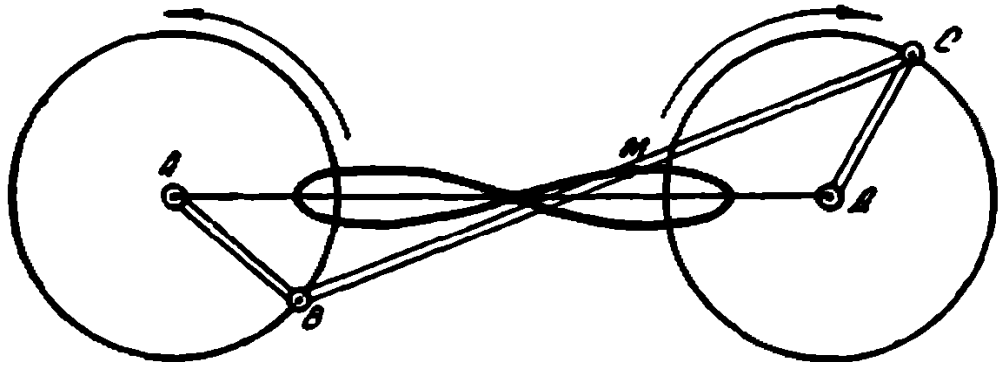
Соотпетстпенно этому следует различать три оспопных формы, п которых могут пстречаться лемнискатоиды (черт. 229). Заметим, что по 2-м случае при $b=2a$, т. е. при рапенстпе всех 4-х зпепьеп антипараллелограма, лемнискатопда пырождается п пару кругоп, для которых ось у-оп служит общей касательной (уравнение крипой п этом случае $\rho^2=4a^2\cos 2\varphi$ распадается на два: $\rho=2a\cos\varphi$ и $\rho=-2a\cos\varphi$).

Наконец, при $b=a\sqrt{2}$ мы получаем урапнение:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi,$$

являющееся урапнепем обыкпопенной л е м н и с к а т ы.

В паровых машинах встречается иногда шарнирный механизм, известный под названием „параллелограма Уатта", позволяющий вращательное движение около точки A преобразовать по вращательное движение около точки D в сторону обратную первому движению. Нетрудно видеть,

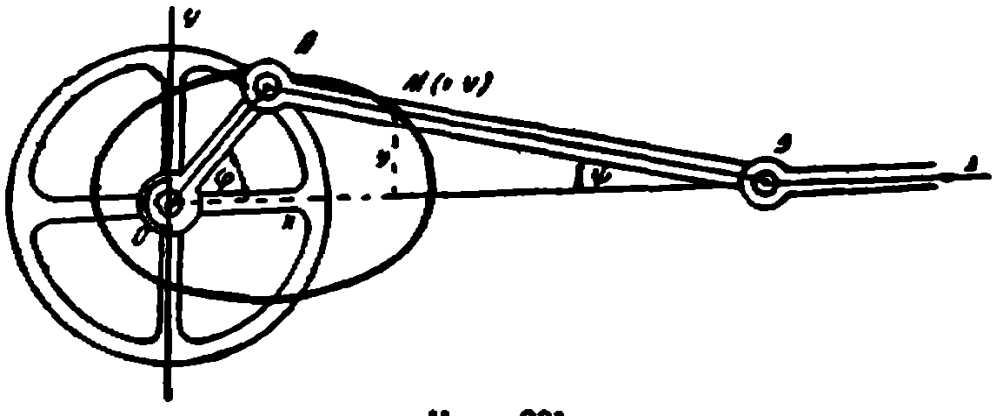


Черт 230.

что при AB=DC AD=BC середина соединительного звена BC при этом движении описывает лемнискатоиду 1-го типа (черт. 230).

2. Кривые, описываемые точками шатуна.

Рассматривая кривые, которые описываются точками шарнирных механизмов, необходимо остановиться на кривой, получаемой как **след некоторой точки M шатуна паровой машины.**



Черт. 231.

Выбрав надлежащим образом координатную систему и обозначив длину кривошипа OA через r, а длину шатуна через d и, наконец, расстояние AM через a, введем вспомогательные параметры $\angle AOB=\varphi$ и $\angle ABO=\psi$ (чертеж 231).

Тогда из $\triangle OAB$ имеем:

$$r \operatorname{Sin} \varphi = d \operatorname{Sin} \psi \tag{1}$$

кроме этого:

$$x = r \operatorname{Cos} \varphi + a \operatorname{Cos} \psi \tag{2}$$

и:

$$y = r \operatorname{Sin} \varphi - a \operatorname{Sin} \psi \tag{3}$$

Из уравнений 1-го и 3-го имеем:

$$\operatorname{Sin} \psi = \frac{y}{d-a} \quad \text{и} \quad \operatorname{Sin} \varphi = \frac{dy}{(d-a)r},$$

откуда:

$$\operatorname{Cos} \psi = \frac{\sqrt{(d-a)^2 - y^2}}{d-a} \quad \text{и} \quad \operatorname{Cos} \varphi = \frac{\sqrt{(d-a)^2 r^2 - y^2 d^2}}{(d-a)r}.$$

Подставляя в уравнение 2-ое, получаем:

$$x = \frac{a\sqrt{(d-a)^2 - y^2} + \sqrt{(d-a)^2 r^2 - y^2 d^2}}{d-a}.$$

Таково уравнение искомой кривой в явной форме. Освобождаясь от радикалов, получаем:

$$[(x^2 - r^2 - a^2)(d-a)^2 + y^2(d^2 + a^2)]^2 -$$
$$- 4a^2 [(d-a)^2 r^2 - d^2 y^2] [(d-a)^2 - y^2] = 0.$$

Судя по уравнению, исследуемая кривая является алгебраической кривой 4-го порядка. По смыслу движения заключаем, что кривая должна иметь овальную форму и пересекать ось x-ов в точках, абсциссы которых $r+a$ и $r-a$.

Необходимо остановиться на весьма поучительной особенности полученного уравнения: так как x и y входят в это уравнение только в четных степенях, то, очевидно, кривая должна быть симметрична относительно обеих осей, на самом же деле непосредственно по чертежу видно, что симметрии относительно оси y-ов быть не может. Противоречие это объясняется тем, что полученное уравнение является ответом на более общую задачу, нежели та, которую мы решали Мы, по существу говоря, определили кривую, которую описывает середина прямой постоянной длины, скользящая одним концом по окружности, а другим по прямой, и так как точка B с успехом может лежать и справа и слева от точки O (на выводе уравнения это, очевидно, не отразится), то полученное уравнение является

уравнением двух кривых, составляющих систему действительно симметрпчную относительно оси у-ов. По смыслу нашей задачи нас, очевпдно, пнтересует лпшь правая кривая.

Построение кривой шатуна можно осуществить следующим образом: в явном уравнепии нашей кривой обозначим:

$$\frac{a\sqrt{(d-a)^2-y^2}}{d-a}=a\sqrt{1-\frac{y^2}{(d-a)^2}}$$ через x_1 (1)

и:

$$\frac{\sqrt{(d-a)^2r^2-d^2y^2}}{d-a}=r\sqrt{1-\frac{d^2}{(d-a)^2}y^2}$$ через x_2, (2)

тогда очевидно $x=x_1+x_2$, но из уравнения (1) следует:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y^2}{(d-a)^2}=1,$$

а из уравнения (2).

$$\frac{x_1^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{d-a}{a}\right)^2}=1.$$

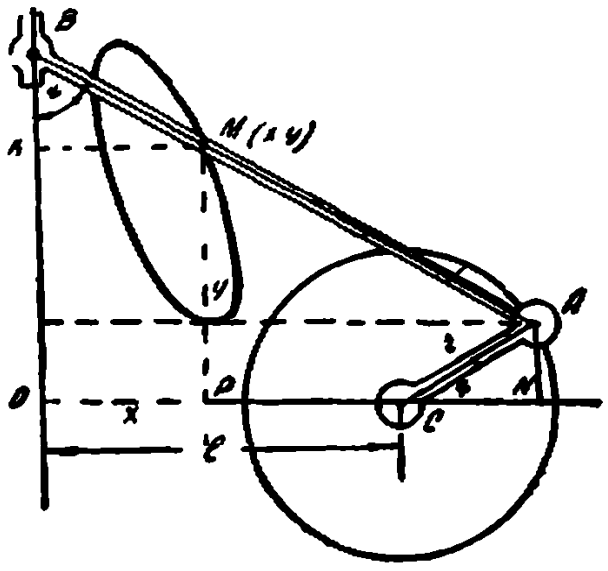
Отсюда ясно, что если построить эллипсы, соответствующие полученным уравнениям, то построение нашей кривой можно будет производить таким образом. для выбранной ординаты на каждом эллипсе найдем соответствующую абсциссу, сложив эти абсциссы получим абсцпссу нашей кривой, соответствующую выбранной ординате.

В случае так называемой эксцентрической криволинейной передачи, уравнение кривой, описываемой точкой шатуна, будет несколько иным.

Обозначив AB—длину шатуна через d, расстояпие BM через a, OC—через k и вводя вспомогательные переменные φ и ψ (черт. 232), будем иметь

$$y=(d-a)\cos\psi+r\sin\varphi \quad (1)$$

$$x=a\sin\psi \quad (2)$$



Черт. 232.

$$k = d \operatorname{Sin} \psi - r \operatorname{Cos} \varphi \qquad (3)$$

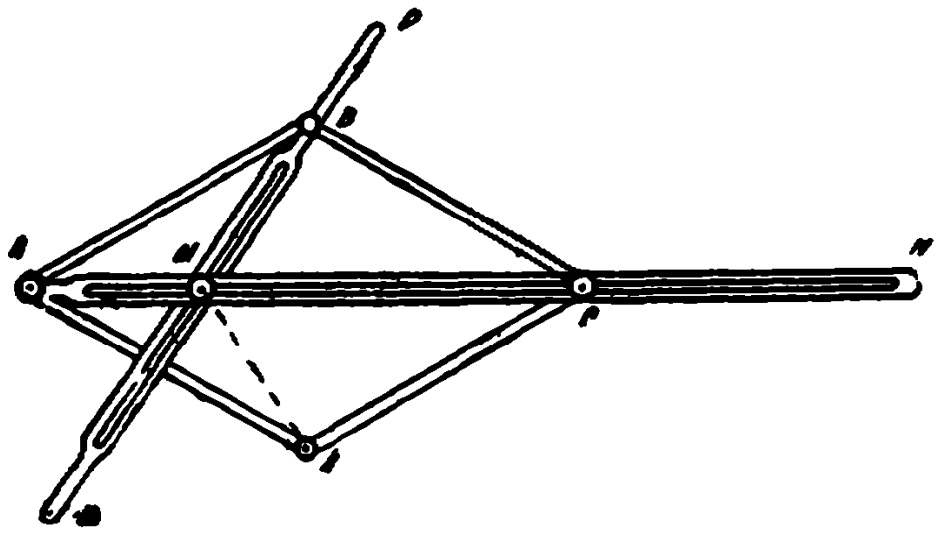
Из уравнений 2-го и 3-го находим выражения для $\operatorname{Sin}\varphi$ и $\operatorname{Cos}\psi$ и, подставляя в (1), получим уравнение кривой в виде:

$$y = (d-a)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + r\sqrt{1-\left(\frac{dx-ak}{ar}\right)^2}.$$

Кривая будет иметь форму овала, асимметричного относительно осей.

3. Аппарат Кэмпбелля.

Рассматривая кривые, описываемые при помощи шарнирных механизмов, можно остановиться на так называемом аппарате Кэмпбелля, предназначенном для вычерчивания кривых 2-го порядка.



Черт. 233.

Он состоит из 6-ти звеньев, четыре из которых равны между собой и образуют ромб (черт. 233).

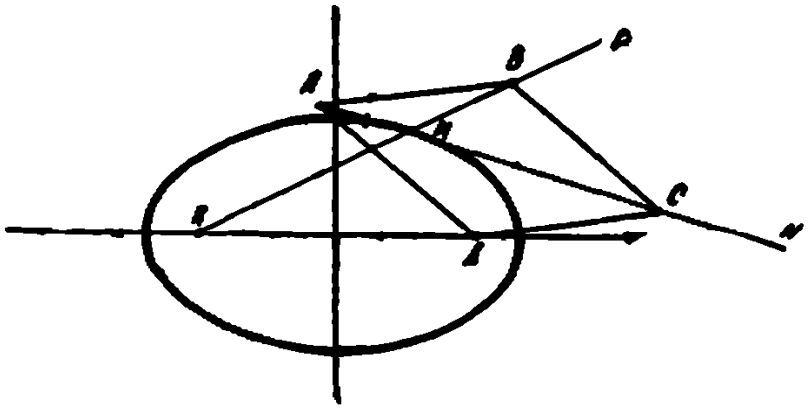
Стержни AN и PK имеют прорези, по которым могут свободно скользить штифты M и C.

Основное свойство этого механизма заключается в его способности сохранять во время движения отрезки MB и MD равными между собой, что непосредственно вытекает из равенства треугольников AMB и AMD.

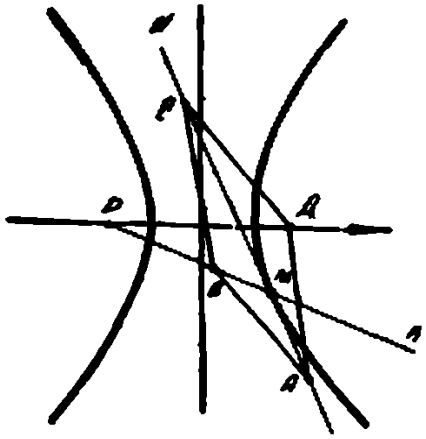
Это свойство позволяет, укрепив в точке M чертящее острие, получить с помощью аппарата Кэмпбелля любую

из крпвых 2-го порядка, располагая его в каждом случае согласно чертежей (234, 235, 236).

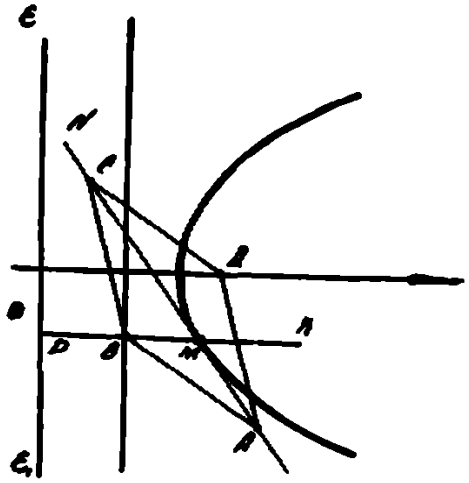
В последнем случае звеио KP должио скользпть конном P по прямой EE_1, оставаясь все время перпендикулярным к этой прямой.



Черт. 234



Черт 235



Черт. 236

4. Инверсор Поселье.

Остановимся в заключение еще на одпой „кривой", вычерчиваемой при помощи шарнирного механпзма Поселье, состоящего из 7-ми звепьев, скрепленных шарипрами в точках A, B, C и D (черт. 237).

Точки O и M неподвпжны, стержни OA, OC и MD могут вращаться около этих точек. Длины стержней таковы, что $OA = OC = a$, $AB = BC = CD = DA = b$ и, наконец, $MD = OM = c$.

Найдем кривую, оппсываемую точкой B при двпжепип механизма.

Вообразив окружность, описанную около точки A радиусом, равным a, и проведя к ней из точки O касательную ON, замечаем, что $OB.OD = ON^2$, но из $\triangle ONA$:

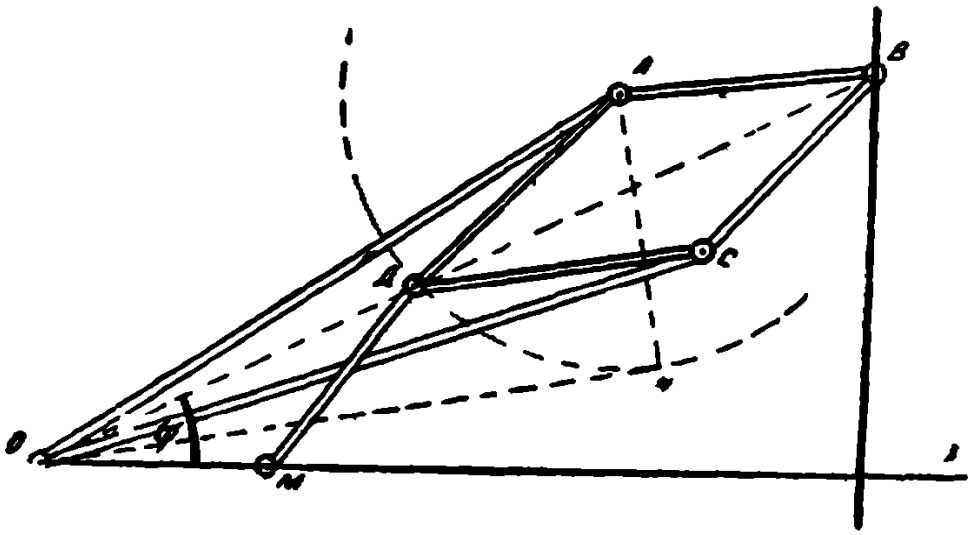
$$ON^2 = OA^2 - AN^2 = a^2 - b^2,$$

следовательно,

$$OB.OD = a^2 - b^2,$$

откуда:

$$OB = \frac{a^2 - b^2}{OD}.$$



Черт. 237.

Принимая OM за полярную ось и обозначив OB, радиус-вектор точки B, через ρ, получаем полярное уравнение искомой кривой:

$$\rho = \frac{a^2 - b^2}{OD}.$$

Но $OD = 2c\cos\varphi$, как радиус-вектор окружности, описываемой точкой D. Подставляя, получаем:

$$\rho = \frac{a^2 - b^2}{2c\cos\varphi},$$

или

$$\rho\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2c},$$

или

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2c}.$$

Полученное уравнение показывает, что искомая кривая будет прямой линией, перпендикулярной к полярной оси. Таким образом точка B будет двигаться по прямой.

Итак шарнирный механизм Поселье, называемый инверсором, позволяет преобразовывать круговое движение в прямолинейное. Инверсор изобретен в 1864 г. офицером французской армии Поселье (Peaucellier) и независимо от него русским математиком Липкиным в 1868 г.

Заканчивая рассмотрение некоторых кривых, вычерчиваемых при помощи шарнирных механизмов, заметим, что шарнирными механизмами с надлежаще выбранным количеством звеньев и расположением их можно вычертить любую алгебраическую кривую, как это показал английский математик Кемпе (Kempe) в 1877 г.

Часть II

I. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ КРИВОЙ

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ КРИВОЙ

Аналитическая и дифференциальная геометрия дают нам аппарат, с помощью которого можно более или менее детально изучить особенности формы данной кривой.

Подобное исследование полезно проводить придерживаясь определенного порядка в работе определенной схемы, которая может быть предложена, например, в следующем виде:

1. Исследование кривой на симметрию.
2. Определение интервала изменения переменных, входящих в уравнение кривой
3. Определение точек пересечения кривой с осями.
4. Определение вершин кривой.
5. Определение точек перегиба.
6. Определение ассимптот кривой.
7. Определение особых точек.
8. Определение дополнительных точек.
9. Схематический чертеж кривой.

Остановимся подробно на каждом пункте этой схемы.

1. Исследование кривой на симметрию.

Кривая, заданная в прямоугольной системе, будет

a) симметрична оси x-ов, если уравнение ее не изменится от замены y на —y;

b) симметрична оси y, если уравнение ее не изменится от замены x на —x

c) симметрична относительно обеих осей и следовательно—относительно начала, если уравнение ее не изменится от замены x на —x, а y на —y.

Для алгебраической кривой первый пункт определяется, если в уравнение ее y входит только в четной степени; второй пункт определяется, если в уравнение ее x входит только в четной степени и третий, если x и y входит в уравнение этой кривой только в четных степенях.

d) симметрична относительно биссектрисы $y = x$, если уравнение ее не изменится от замены y на x, а x на y.

Пример $x^3 + y^3 - axy = 0$ (Декартов лист).

e) симметрична относительно биссектрисы $y=-x$, если уравнение ее не изменяется от замены у-ка на $-x$, х-са на $-y$.

Пример: $x^2-xy+y^2-1=0$ (Эллипс).

g) кривая будет обладать полярной симметрией, т. е. после поворота на 180° часть кривой, расположенная над осью х-ов будет совпадать с частью этой кривой, расположенной под осью х-ов, если двум значениям х-са одинаковым по абсолютной величине, но разным по знаку соответствуют два значения у-ка, одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку, иными словами говоря, если изменение знака у абсциссы влечет изменение знака у соответствующей ординаты, но не изменит абсолютную величину последней.

Пример: Кубическая парабола $y=x^3$.

2. Определение интервала изменения переменных входящих в уравнение кривой.

Исследование интервала изменения переменных позволяет определить область существования кривой.

Для этой цели необходимо решить уравнение относительно у-ка, а затем изменяя х от $-\infty$ до $+\infty$ проследить как себя в это время будет вести у.

При этом может оказаться, что в некоторых участках изменения х-са соответствующие ему значения у-ка окажутся мнимыми.

Если через конечные точки таких участков, лежащих на оси х-ов, провести прямые $\parallel$ оси у-ов, то на плоскости выделятся области, в которых кривая не существует.

Решая уравнение относительно х-са, можно подобным образом прямыми $\parallel$ оси х-ов выделить на плоскости области, в которых кривая не существует.

К сожалению в большинстве случаев решить уравнение относительно обоих переменных не удается. Тогда приходится ограничиться определением интервала изменения хотя бы одного из переменных.

Изучая интервал изменения переменных, необходимо, наряду с определением мнимых областей, отмечать разрывы кривой, соответствующие таким конечным значениям одного из переменных, при которых соответствующее значение другого переменного обращается в ∞.

Изучение интервалов изменения переменных дает возможность заключить, является ли данная кривая замкнутой или она имеет бесконечные ветви. Очевидно, если хотя бы одно из переменных может принимать

значение равное ∞, в то время как другое переменное принимает некоторое конечное или бесконечное значение, кривая будет иметь бесконечные ветви, в противном случае она будет замкнутой.

Бесконечные ветви кривой, сопровождаемые асимптотами, называются *гиперболическими*, не имеющие асимптот—*параболическими*.

Для определения мнимых областей кривой, заданной в параметрической форме уравнении. $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ решают каждое из них относительно t и находят каким значением х-са или у-ка соответствуют мнимые значении t. Очевидно, эти значения х-са и у-ка не могут быть координатами точек кривой Проведя через концы интервалов, соответствующих таким значениям, прямые, || координатным осям, выделяют на плоскости области, в которых кривая не существует

3. Определение точек пересечения кривой с осями координат.

Полагая в уравнении кривой $y=0$ и решая его относительно х-са, находим абсциссы точек пересечении данной кривой с осью х-ов

Подобным образом полагая $x=0$ и решая уравнение относительно у-ка найдем точки пересечении кривой с осью у-ов

Если данная кривая симметрична относительно биссектрисы $y=x$, то, полагая в уравнении ее $y=x$ и решая его, определим точки пересечения данной кривой с биссектрисой.

4. Определение вершин кривой.

Для определения вершин кривой поступаем следующим образом:

1) Если кривая задана явным уравнением $y=f(x)$, то для определении вершин y_{max} и y_{min} решаем систему:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ f'(x)=0 \end{cases}$$

При этом в точке $M(x_1, y_1)$ будет:

вершина y_{max}, если при $x=x_1$ y' меняет знак с $+$ на $-$, или что то же, если $f'(x_1)<0$

вершина y_{min}, если при $x=x_1$ y' меняет знак с $-$ на $+$ или, что то же, если $f'(x_1)>0$.

Если же окажется, что при $x = x_1$ не только $y' = 0$, но и все последовательные производные до „n"-ой включительно равны нулю, то при п ч е т н о м n точке $M(x_1, y_1)$ будет:

вершина y_{max}, если $f^{(n)}(x_1) < 0$

и

вершина y_{min}, если $f^{(n)}(x_1) > 0$

при н е ч е т н о м же з н а ч е н и и n в точке $M(x_1, y_1)$ будет п е р е г и б с касательной $\parallel$ оси x-ов.

2) Если кривая задана неявным уравнением $f(x, y) = 0$, то для определения вершин y_{max} и y_{min} решаем систему

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

При этом в точке $M(x_1, y_1)$ будет

вершина y_{max}, если $f''_{xx}(x_1, y_1) \cdot f'_y(x_1, y_1) > 0$

и

вершина y_{min}, если $f''_{xx}(x_1, y_1) \cdot f'_y(x_1, y_1) < 0$. *)

Для определения вершин x_{max} и x_{min} решаем систему.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

При этом в точке $M(x_1, y_1)$ будет:

вершина x_{max}, если $f''_{yy}(x_1, y_1) \cdot f'_x(x_1, y_1) > 0$

и

вершина x_{min}, если $f''_{yy}(x_1, y_1) \cdot f'_x(x_1, y_1) < 0$.

3) Если кривая задана параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

то значение параметра t соответствующее вершинам y_{max} и y_{min} будут корнями н е ч е т н о й к р а т н о с т и уравнения: $\varphi'(t) = 0$ при этом вид вершины (y_{max} или y_{min}) определится как и выше исследованием знака $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Подобно этому значения параметра t соответствующие вершинам x_{max} и x_{min} будут корнями н е ч е т н о й крат-

*) Предполагается, что в точке $M(x_1, y_1)$ $f'_y(x, y) \neq 0$.

ности уравнения: $\varphi'(t)=0$.

Вид вершин (x_{max} или x_{min}) определится исследованием знака $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5. Определение точек перегиба.

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то для определения координат точек перегиба решаем систему.

$$\begin{cases} y=f(x), \\ f''(x)=0 \end{cases}$$

При этом данная кривая будет иметь в точке $M(x_1, y_1)$

а) перегиб с выпуклости, обращенной в сторону положит. у-ов на вогнутость, если при $x=x_1$ y'' меняет знак с $-$ на $+$;

b) перегиб с вогнутости на выпуклость, если при $x=x_1$ y'' меняет знак с $+$ на $-$;

c) перегиб с касательной $\parallel$ оси x-ов, если при $x=x_1$, не только $y''=0$ но и $y'=0$.

Для определения точек перегиба с касательной $\parallel$ оси y-ов необходимо решить уравнение кривой относительно x-са. Получим при этом $x=\varphi(y)$.

Решаем затем систему:

$$\begin{cases} x=\varphi(y), \\ \varphi''(y)=0. \end{cases}$$

Если среди корней этой системы будут такие значения $x=x_1$ и $y=y_1$, что для них не только $\varphi''(y)=0$, но и $\varphi'(y)=0$, то точка $M(x_1, y_1)$ будет точкой перегиба, в которой касательная $\parallel$ оси y-ов.

Все предыдущие положения будут справедливы при условии, что третья производная в точке $M(x_1, y_1)$ не равна нулю.

Может, однако, случиться, что некоторая пара корней (x_1, y_1) системы:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ f'(x)=0 \end{cases}$$

обращает в нуль не только y'', но и y''' и y^{IV} и т. д. Тогда в точке $M(x_1, y_1)$ будет или:

а) точка перегиба, если первая из необратившихся в нуль производных нечетного порядка или:

в) вершина y_{max} или y_{min}, если периан из необратившихся в нуль производных четного порядка. Такого рода вершины называют иногда точками сплющенности. В этих точках лежат на одной прямой четное число следующих друг за другом точек данной кривой; в точках же перегиба таких, следующих друг за другом точек, всегда нечетное число.

Изложенный способ определения точек перегиба требует нахождения второй производной, что часто бывает затруднительно, особенно когда кривая задана неявным уравнением.

В силу этого обстоятельства укажем еще один способ определения точек перегиба, применимый только к алгебраическим кривым.

Пусть дано уравнение алгебраической кривой n-го порядка.

Полагаем $x=\frac{\bar{x}}{z}$ и $y=\frac{\bar{y}}{z}$, где $\bar{x}$, $\bar{y}$, z так называемые однородные координаты. Тогда уравнение данной кривой примет вид:

$$f\left(\frac{\bar{x}}{z}, \frac{\bar{y}}{z}\right)=0$$

или:

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z)=0.$$

Последнее уравнение будет уравнением данной кривой в однородных координатах.

В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что точки перегиба алгебраической кривой n-го порядка, заданной в однородных координатах уравнением

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z)=0$$

лежат на алгебраической кривой $3(n-2)$ порядка называемой гессианой и выражаемой в однородных координатах уравнением:

$$\begin{vmatrix} F_{\bar{x}\bar{x}} & F_{\bar{x}\bar{y}} & F_{\bar{x}z} \\ F_{\bar{y}\bar{x}} & F_{\bar{y}\bar{y}} & F_{\bar{y}z} \\ F_{z\bar{x}} & F_{z\bar{y}} & F_{zz} \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом для определения точек перегиба достаточно решить совместно уравнение данной кривой (в декартовых координатах) и уравнение ее гессианы, причем

составили это уравнение и найденных производных F_{xx}, F_{xy} и т. д., следует положить $z=1$.

Заметим, что решая эту систему мы найдем не только точки перегиба, но и точки самоприкосновения.

Если кривая задана в параметрической форме уравнениями:

$$x=\varphi(t)$$

$$y=\psi(t),$$

то значения параметра t, соответствующие точкам перегиба, будут корнями нечетной кратности уравнения

$$x'y''-y'x''=0.$$

Если кривая задана в полярной системе уравнением:

$$\rho=f(\varphi),$$

то значения φ, соответствующие точкам перегиба, будут корнями нечетной кратности уравнения

$$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=0.$$

6. Определение асимптот кривой.

1. Если данная кривая является алгебраической, то

1) уравнения асимптот этой кривой параллельных оси y-ов получатся, если приравнять нулю коэфициент при старшей степени y-ка в уравнении этой кривой (предполагается, что уравнение кривой приведено к виду: $A_0x^n+A_1x^{n-1}y+A_2x^{n-2}y^2+\ldots=0$)

2) уравнения асимптот параллельных оси x-ов получатся, если приравнять к нулю коэфициент при старшей степени x-са в уравнении этой кривой.

Для определения асимптот наклонных к координатным осям, уравнение которых можно представить в виде $y=mx+b$ поступают так: в уравнении данной кривой полагают y равным $mx+b$, приравнивают нулю коэфициенты при двух высших степенях x-са и решают систему полученных таким образом уравнений. Корни этой системы и дадут значения m и b

2. Если данная кривая является трансцендентной, то:

1) для определения асимптот параллельных координатным осям стремятся найти такие конечные значения одного из переменных, при которых другое переменное обращается в ∞. Так, если при $x=a$ $y=\infty$, то прямая

$x-a=0$ — будет ассимптотой данной кривой.

2) Определение наклонных ассимптот трансцендентных кривых, вообще говоря, затруднительно. Если трансцендентная кривая задана явным уравнением

$$y=f(x),$$

то угловой коэфициент m и начальная ордината b наклонной ассимптоты определяются из формул

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

Для определения положения кривой относительно ассимптоты достаточно исследовать знак бесконечно-малой разности.

$$\Delta=f(x)-(mx+b)$$

и зависимости от знака бесконечно-большого значения x-са. Если при этом окажется, что $\Delta>0$, то ветвь кривой располагается над ассимптотой, если же $\Delta<0$, то ветвь кривой расположится под ассимптотой

3. Если кривая задана в параметрической форме уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \text{ то} \end{cases}$$

1) для определения ассимптот параллельных коорд. осям исследуют нет ли таких значений параметра t, при которых одна из переменных остается конечной, а другая обращается в ∞. Так если при $t=t_1$ $y=\infty$, а „x равняется" некоторому конечному числу, то кривая имеет ассимптоту $\parallel$ оси y-ов

$$x-\varphi(t_1)=0$$

2) Для определения наклонных ассимптот исследуют нет ли у параметра такого значения t_1, при котором обе переменные обращаются в ∞ Если такое значение находится, то угловой коэфициент m и начальная ордината b наклонной ассимптоты определяются по формулам

$$m=\lim_{t\to t_1}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \quad \text{и} \quad b=\lim_{t\to t_1}[\psi(t)-m\varphi(t)].$$

4. Если кривая задана в полярной системе уравнением:

$$\rho=f(\varphi),$$

то для определения ее ассимптоты.

1) находит такое значение φ_1, для полярного угла, при котором $\rho=\infty$. Этот угол определит направление асимптоты, если ρ на существует.

2) определяют предел полярной подкасательной

$$\lim_{\rho' \,|\varphi \to \varphi_1} \frac{\rho^2}{\rho'}$$

Этот предел, если он существует, определяет расстояние асимптоты от полюса.

Направление и расстояние от полюса вполне определяют асимптоту.

При этом заметим, что если. $\lim \frac{\rho^2}{\rho'} > 0$, то асимптота проходит от полюса спрана, если же $\lim \frac{\rho^2}{\rho'} < 0$. то — слева, если смотреть из полюса по направлению радиуса вектора уходящего в ∞.

7. Определение особых точек кривой.

Точка $M(x_1, y_1)$ принадлежащая алгебраической кривой $f(x, y)=0$ называется особой, если в ней:

$$f'_x(x, y)=0 \quad \text{и} \quad f'_y(x, y)=0$$

Таким образом для определения координат особых точек кривой необходимо найти такие значения х-са и у-ка, которые одновременно удовлетворяют трем уравнениям:

$$f(x, y)=0,$$
$$f'_x(x, y)=0,$$
$$f'_y(x, y)=0.$$

Если найдены такие значения x_1, y_1, которые удовлетворяют этим уравнениям, но для которых хотя бы одна из производных 2-го порядка $f''_{xx}(x_1, y_1)$, $f''_{xy}(x_1, y_1)$ и $f''_{yy}(x_1, y_1)$ не равна нулю, то особую точку $M(x_1, y_1)$ называют двойной.

Различают три вида двойных точек, каждый из которых определяется величиной выражения

$$\Delta = [f''_{xy}(x_1, y_1)]^2 - f''_x(x_1, y_1) f''_y(x_1, y_1)$$

если: 1) $\Delta > 0$ то точку $M(x_1, y_1)$ называют узловой.

2) $\Delta = 0$ „ „ $M(x_1, y_1)$ „ точкой возврата.

Причем, если и этой точке ветви кривой лежат по разные стороны от касательной, то точку называют **точкой возврата 1-го рода**, если по одну сторону, то точку называют **точкой возврата 2-го рода**.

Если $\Delta<0$ то точку $M(x_1, y_1)$ называют **изолированной**.

Если в точке $M(x_1, y_1)$ не только первые, но и все вторые производные $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yy}(x, y)$ равны нулю, а среди производных 3-го порядка есть хотя бы одна не равная нулю, то особую точку называют **тройной**. Наконец, если в точке $M(x_1, y_1)$ все производные 3-го порядка равны нулю, но хотя бы одна производная 4-го порядка не равна нулю, то точку называют **четверной** и т. д.

Если особая точка алгебраической кривой лежит в начале, то для получения уравнений касательных в этой точке достаточно приравнять нулю группу членов низшей степени в уравнении данной кривой.

Для определения уравнений касательных в особой точке не лежащей в начале координат необходимо предварительно перенести систему координат в ту точку и написав уравнение кривой в новой системе поступать так, как было указано выше.

У **трансцендентных** кривых кроме указанных видов особых точек существуют и другие виды, как например

1) **точки прекращения**—точки в которых кривая обрывается. Они характеризуются тем, что достаточно малая окружность, описанная из такой точки, как из центра пересекает данную кривую только в одной точке;

2) **угловые точки** в которых прекращаются две ветви кривой, каждая из которых имеет в этой точке свою касательную.

Указать общий прием для нахождения особых точек трансцендентных кривых нельзя. Для каждой кривой приходится с этой целью проводить **специальное исследование ее уравнения** (см. примеры).

Для определения двойных точек у кривой, заданной в **параметрической форме уравнениями**.

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

достаточно найти.

1) такие два значения t_1 и t_2 параметра, при которых x и y имеют одинаковые значения. Если это удастся, то точка $M(x_1, y_1)$, где.

$$x_1=\varphi(t_1)=\varphi(t_2) \quad \text{и} \quad y_1=\psi(t_1)=\psi(t_2),$$

будет двойной точкой данной кривой. Очевидно, для нахождения такой точки надо решить систему.

$$\begin{cases} \varphi(t_1)=\varphi(t_2) \\ \psi(t_1)=\psi(t_2) \end{cases}$$

или:

2) найти такое значение t_1 параметра при котором $\varphi'(t)=\psi'(t)$.

Если это удастся, то точка $M(x_1, y_1)$, где $x_1=\varphi(t_1)$ и $y=\psi(t_1)$ будет точкой возврата данной кривой.

8. Определение дополнительных точек.

Кроме характерных точек, к которым относятся все выше рассмотренные точки кривой, в некоторых случаях бывает полезно определить ряд дополнительных точек изучаемой кривой с целью более точного воспроизведения этой кривой на чертеже.

Точки эти можно определить давая некоторые произвольные значения одному из переменных и вычисляя значение соответствующее другому переменному из уравнения кривой после подстановки в него значения данного первому переменному.

Но во многих случаях такая подстановка приводит к трудно решаемому уравнению, поэтому возникает вопрос о нахождении дополнительных точек иными способами. Укажем некоторые из них:

1) Если кривая проходит через начало координат, то дополнительные точки выгодно искать как точки пересечения прямых $y=mx$, соответствующих различным значениям m с данной кривой.

Так как одна из этих точек лежит в начале, то уравнение, которое получится после подстановки величины mx вместо y-ка, обязательно будет иметь корень $x_1=0$, но зная один из корней уравнения можно всегда понизить его степень, если оно является алгебраическим, и прийти, таким образом, например, от кубического уравнения к квадратному. Если начало является двойной точкой, то в уравнении, полученном после подстановки mx вместо y два корня будут равны нулю, а это позволит снизить степень этого уравнения на 2 единицы.

Таким образом, если алгебраическая кривая n-го порядка имеет в начале двойную точку, то прямая $y=mx$ будет пересекать эту кривую кроме начала в точках, абсциссы которых найдутся из уравнения $n-2$-ой степени относительно x-са.

2) Иногда бывает полезно при нахождении дополнительных точек левую часть уравнения данной кривой разбить на слагаемые

$$f(x, y)=\varphi(x, y)+\psi(x, y).$$

Значение x-са и y-ка, обращающее в ноль каждое из этих слагаемых, очевидно, обратят в ноль и $f(x, y)$ и следовательно будут удовлетворять уравнению данной кривой.

Но эти значения удовлетворяя одновременно уравнениям $\varphi(x, y)=0$ и $\psi(x, y)=0$ очевидно являются точками пересечения кривых соответствующих этим уравнениям.

Если эти кривые достаточно просты, то построив их, мы получим на чертеже дополнительные точки кривой $f(x, y)=0$, как точки пересечения кривых: $\varphi(x, y)=0$ и $\psi(x, y)=0$.

Способ этот оказывается особо выгодным, если каждое из слагаемых удастся разложить на множители.

Так, если.

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y).\varphi_2(x, y)$$

и

$$\psi(x, y)=\psi_1(x, y).\psi_2(x, y),$$

то дополнительные точки нашей кривой $f(x, y)=0$ будут точками пересечения следующих пар кривых:

$$\varphi_1(x, y)=0 \quad \varphi_1(x, y)=0 \quad \varphi_2(x, y)=0 \quad \varphi_2(x, y)=0$$
$$\psi_1(x, y)=0 \quad \psi_2(x, y)=0 \quad \psi_1(x, y)=0 \quad \psi_2(x, y)=0$$

Каждая из этих вспомогательных кривых может оказаться достаточно удобной для построения, благодаря несложности ее уравнения.

II. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

1. Формуляр кривой: $xy = x^3 - 1$ („трезубец Ньютона")

1. Симметрия	Нет
2. Интервал изменения переменных	$y = x^2 - \frac{1}{x}$; x | $-\infty$ 0 .. 1 .. $+\infty$ y | $+\infty$. $\pm\infty$. 0. $+\infty$ Бесконечные ветви! При $x = 0-$ разрыв.
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точке (1,0), ось y-ов не пересекает.
4 Вершины	$y' = \frac{2x^3+1}{x^2}$, $2x^3+1=0$; $x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ При $x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ $y'=0$ и меняет знак с — на +, следовательно в точке: $\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 3\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$ — вершина y_{min}
5 Точки перегиба	$y'' = \frac{2x^3-2}{x^3}$; $2x^3-2=0$ $x=1$ При $x=1$ $y''=0$ x меняет знак с — на +, следовательно x точке (1, 0)—перегиб с выпуклости на вогнутость.
6 Асимптоты	$x^3 - xy - 1 = 0$; $x=0$—ассимптота ‖ оси y-ов. Ассимптот параллельных оси x-ов—нет. Представив уравнение к виде: $y = x^2 - \frac{1}{x} = \bar{y} - \frac{1}{x}$, замечаем, что $\lim(y-\bar{y}) = \lim\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)_{x\to\infty} = 0$, следовательно кривая имеет криволинейную ассимптоту: $\bar{y} = x^2$.
7 Особые точки	$U(x, y) = x^3 - xy - 1$ $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -x$, $\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ -x = 0 \\ x^3 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ Уравнения не имеют общих корней, след-но особых точек у кривой нет.

Смотрите черт 238.

2. Формулир кривой: $y(x^3+1)=x$ („Агнивея")

1 Симметрия	Симметрии относительно осей нет, но в 3-м коорд. углу кривая расположена так же, как в 1-ом.
2 Интервал изменения перемен-ных	$y=\frac{x}{x^3+1}$ x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$ y: 0 , 0 , 0 Бесконечные ветви!
3. Пересечение с осями	Кривая проходит через начало
4. Вершины	$y'=\frac{1-x^2}{(x^3+1)^2}$, $1-x^3=0$; $x_1=1$ $x_2=-1$ При $x=1$ $y'=0$ и меняет знак с + на −, следовательно в точке $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ — верш y_{max} При $x=-1$ $y'=0$ и меняет знак с − на +, следовательно в точке $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ — верш. y_{min}
5. Точки перегиба	$y''=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$, $2x^3-6x=0$; $x_1=0$; $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ При $x=0$ $y''=0$ и меняет знак с + на −, след-но x точке (0,0) — перегиб с вогнутости на выпуклость. При $x=\sqrt{3}$ $y''=0$ и меняет знак с − на +, след-но в точке $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ — перегиб с выпуклости на вогнутость Подобно этому в точке $\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ — перегиб с выпуклости на вогнутость. Три точки перегиба лежат на одной прямой.
6. Ассимптоты	$x^3y-x+y=0$ Ассимптота: $y=0$ Параллельных оси y-ов нет. Наклонных также нет.
7. Особые точки	$1(x,y)=x^3y+y-x$; $\frac{\partial 1}{\partial x}=2xy-1$ $\frac{\partial 1}{\partial y}=x^3+1$ $\begin{cases} 2xy-1=0 \\ x^3+1=0 \\ y(x^3+1)=x \end{cases}$ Общих корней нет, след-но особых точек у кривой нет.

3. Формуляр кривой: $yx^3 = x + 1$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$y = \frac{x+1}{x^3}$ $x \mid -\infty, \ldots 0 \ldots +\infty$ $y \mid 0 \ldots \ldots +\infty \ldots 0$ Бесконечные ветви! Разрыв!
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точке $(-1, 0)$ Ось y-ов не пересекает.
4. Вершины	$y' = \frac{-x-2}{x^3}$ При $x = -2$ $y' = 0$ и меняет знак с $-$ на $+$, след-но в точке $\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$ — вёрш. y_{min}
5 Точки перегиба	$y'' = \frac{2x+6}{x^4}$ При $x = -3$ $y'' = 0$ и меняет знак с $-$ на $+$, след-но в точке $\left(-3, -\frac{2}{9}\right)$ — перегиб с выпуклости на вогнутость
6. Ассимптоты	$x^3 y - x - 1 = 0$ Кривая имеет ассимптоты: $x = 0$ и $y = 0$ Наклонных ассимптот нет
7. Особые точки	$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 1$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3$ $\begin{cases} 2xy - 1 = 0 \\ x^2 = 0 \\ yx^2 = x + 1 \end{cases}$ Общих корней у-ния не имеют, след-но особых точек у кривой нет

Смотрите черт. 240.

4. Формуляр кривой: $y^2(x-1)=x^3$ („трехсторон. гипербола")

1. Симметрия	Относительно оси x-ов
2. Интервал изменения переменных	$y=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ $\begin{array}{c\|c} x & -\infty\ldots 0.\quad .1..+\infty \\ \hline y & \pm\infty\ \ldots 0\quad \pm\infty.\ +\infty \end{array}$ Бесконечные ветви! Между $x=0$ и $x=1$ — кривая не существует
3. Пересечение с осями	Проходит через начало.
4. Вершины	$y'=\frac{2x^2-3x^2}{2\sqrt{x^2(x-1)^3}}$ $x_1=0;\quad x_2=\frac{3}{2}$ При $x_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но: (0,0)—особая точка! При $x_2=\frac{3}{2}$ $y'=0$ x меняет знак с — на +, след-но в точке $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ — верш. y_{min} В силу симметрии кривой, в точке $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ будет вершина y_{max}.
5. Точки перегиба	$y''=\frac{3}{4(x-1)\sqrt{x(x-1)^3}}$ Из выражения y'' непосредственно видно, что кривая не имеет точек перегиба.
6. Ассимптоты	$y^2x-x^3-y^2=0$ или $x^3+(1-x)y^2=0$ Т. о. $x=1$ — ассимптота II оси y-ов. Ассимптот II оси x-ов нет. $(mx+b)^2x-x^3-(mx+b)^2=0$ $\left.\begin{array}{l} 1-m^2=0\quad m=\pm 1 \\ -2bm+m^2=0\quad b=\pm\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ Т о наклонные асс-ты: $y=x+\frac{1}{2}$, $y=x-\frac{1}{2}$
7 Особые точки	$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y}=-2xy+2y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2y$ При $x=0$ и $y=0$ имеем $\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$ след но в начале — точка возврата с касательными. $y^2=0$

Смотрите черт. 241.

5. формуляр кривой: $yx(x-1)=1$

1. Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$y=\frac{1}{x(x-1)}$ $\begin{array}{c\|c} x & -\infty\ldots0\ldots1\ldots+\infty \\ \hline y & 0\ldots\pm\infty\ldots\pm\infty\ldots0 \end{array}$ Бесконечные ветви! Разрыв.
3 Пересечение с осями	$\left.\begin{array}{ll} y=0 & x=\infty \\ x=0 & y=\infty \end{array}\right\}$ Пересечения с осями нет.
4. Вершины	$y'=\frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}$, $x=\frac{1}{2}$ При $x=\frac{1}{2}$ $y'=0$ и меняет знак с + на —, след-но в точке $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ — верш y_{max}
5 Точки перегиба	$y''=\frac{6x^2-6x-2}{x^3(x-1)^3}$; Корни числителя — числа мнимые, след-но точек перегиба у кривой нет.
6. Ассимптоты	$x^2y-xy-1=0$ $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \end{array}\right\}$ ассимптоты параллельны осям Наклонных ассимптот нет
7. Особые точки	Система: $\left\{\begin{array}{l} 2xy-y=0 \\ x^2-x=0 \\ xy(x-1)=1 \end{array}\right.$ не имеет решений, след-но, особых точек у кривой нет.

Смотрите черт. 242.

6. Формуляр кривой: $y^2x = x + 1$

1. Симметрия	Относительно оси x-ов
2. Интервал изменения переменных	$y = \pm\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ x: $-\infty$ ... -1 ... 0 ... $+\infty$ y: ± 1 , 0 , $\pm\infty$, ± 1 Бесконечные ветви! Разрыв Между $x = -1$ и $x = 0$ кривая не существует.
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точке $(-1, 0)$ Ось y-ов не пересекает.
4. Вершины	$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$ Из выражения y' непосредственно видно, что вершин у кривой нет
5. Точки перегиба	$y'' = \frac{4x+3}{4x^2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$ При $x = -\frac{3}{4}$ $y'' = 0$, но точка $(-\frac{3}{4}, y)$ лежит в области, где кривая не существует, след-но точек перегиба нет.
6. Ассимптоты	$y^2x - x - 1 = 0$ $y = \pm 1$ $x = 0$ } ассимптоты параллельные осям. Наклонных ассимптот нет.
7. Особые точки	Система $\begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \\ y^2x = x + 1 \end{cases}$ не имеет решений, след-но особых точек у кривой нет.

Смотрите черт. 243.

7. Формуляр кривой: $y^2 = x^3(x-1)$

1. Симметрия	Относительно оси x-ов
2 Интервал изменения перемен-ных	$y = \pm x\sqrt{x(x-1)}$ | x | $-\infty$ .. 0 1 $+\infty$ | | y | $\pm\infty$ 0 0. $\pm\infty$ | Бесконечные ветви! Между $x=0$ и $x=1$ кривая не существует.
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и (1,0) Ось y-ов не пересекает.
4. Вершины	$y' = \frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x(x-1)}}$ $4x^2-3x=0$; $x_1=0$ $x_2=\frac{3}{4}$ При $x_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но в начале — особая точка. При $x_2=\frac{3}{4}$ $y'=0$, но к точке $\left(\frac{3}{4}, y\right)$ кривая не существует. Т о вершин у кривой нет Т. к. при $x=1$ $y'=\infty$, то в точке (1,0) кривая пересекает ось x-ов под прямым углом
5. Точки перегиба	$y'' = \frac{x^4(8x^2-12x+3)}{4y^2}$; $8x^2-12x+3=0$, $x^1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ При $x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ $y''=0$, след-но в точках $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \pm 1{,}8\right)$ следует ожидать перегибы При $x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ $y''=0$, но в точке $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}, y\right)$ кривая не существует
6 Асимптоты	$x^4 - x^3 - y^2 = 0$ Асимптот нет
7. Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2-6x=0$ $\mid x=0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т. о $\Delta = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0+2\,0=0$, след-но к начале коорд-т — точка возврата с касательной $y^2=0$.

Смотрите черт 244.

8. Формуляр кривой: $y^2x^3 = x^2 - 1$

1. Симметрия	Относительно оси x-ов
2. Интервал изменения переменных	$y = \pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty..-1 & 0.. & 1 & .+\infty \\ \hline y & 0..\pm\infty & 0.... & 0 \end{array}$ Бесконечные ветви. Между $x = -\infty$ и $x = -1$, а также между $x = 0$ и $x = 1$ кривая не существует.
3. Пересечение с осями	Ось x-ов к точках $(\pm 1, 0)$ Ось y-ов не пересекает
4. Вершины	$y' = \frac{3-x^2}{2x^2\sqrt{(x^2-1)x}}$, $3-x^2=0$; $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$ При $x_1=\sqrt{3}$ $y'=0$ и меняет знак с + на −, след-но в точке $(\sqrt{3}, 0,6)$ – верш. $y_{max.}$, к силу симметрии кривой к точке $(\sqrt{3}, -0,6)$ – верш. y_{min}. При $x_2=-\sqrt{3}$ $y'=0$, но кривая к точке $(-\sqrt{3}, y)$ не существует. Т. к. при $x=\pm 1$ $y'=\infty$, то ось x-ов кривая пересекает под прямым углом
5. Точки перегиба	$y'' = \frac{3x^4-22x^2+15}{4yx^5(x^2-1)}$, $3x^4-22x^2+15=0$; $x_1 \approx -\frac{9}{10}$, $x_2 \approx \frac{9}{10}$ $x_3 \approx -2\frac{1}{2}$, $x_4 \approx 2\frac{1}{2}$ При $x_1 = -\frac{9}{10}$ $y''=0$ и при $x_4 = 2\frac{1}{2}$ $y''=0$, след-но в точках $\left(-\frac{9}{10}, \pm\frac{5}{10}\right)$ и $\left(2\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{10}\right)$ следует ожидать перегибы В точках $\left(\frac{9}{10}, y_2\right)$ и $\left(-2\frac{1}{2}, y_2\right)$ кривая не существует.
6. Ассимптоты	$y^3x^3 - x^2 + 1 = 0$ $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ – ассимптоты параллельные осям. Наклонных ассимптот нет.
7. Особые точки	Система $\left\{\begin{array}{l} 3x^2y - 2x = 0 \\ 2xy^3 = 0 \\ y^2x^3 = x^2 - 1 \end{array}\right.$ не имеет решений, следовательно особых точек у кривой нет.

Смотрите черт. 245.

9. Формуляр кривой: $y(x^3+1)-x^2=0$

1. Симметрия	Нет.
2. Интервал изменения переменных	$y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ $\begin{array}{c\|cccc} x & -\infty & \ldots -1 & .0 & +\infty \\ \hline y & 0 & \ldots \pm\infty & .0 & .0 \end{array}$ Бесконечные ветви При $x=-1$ — разрыв
3. Пересечение с осями	Проходит через начало
4. Вершины	$y'=\dfrac{-x^4+2x}{(x3+1)^2}$, $-x^4+2x=0$; $x_1=0$; $x_2=\sqrt[3]{2}$ При $x_1=0$ $y'=0$ и меняет знак с $-$ на $+$, след-но в точке (0,0) верш. y_{min} При $x_2=\sqrt[3]{2}$ $y'=0$ и меняет знак с $+$ на $-$, след-но в точке $\left(\sqrt[3]{2},\ 0{,}5\right)$ — верш. y_{max}
5. Точки перегиба	$y''=\dfrac{2x^6-14x^2+2}{(x^3+1)^3}$, $2x^6-14x^3+2=0$; $x_1\approx 0{,}6$; $x_2\approx 1{,}9$ Т. о. в точках (0,6; 0,3) и (1,9; 0,5) следует ожидать перегибы
6. Ассимптоты	$x^3y-x^2+y=0$ $\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ — ассимптоты параллельные осям. Наклонных ассимптот нет
7. Особые точки	Система $\left\{\begin{array}{l} 3x^2y-2x=0 \\ x^3+1=0 \\ y(x^3+1)-x^2=0 \end{array}\right.$ не имеет решений, след-но особых точек у кривой нет

Смотрите черт. 246.

10. Формуляр кривой: $y^2x^2 = x^2 - 1$

1. Симметрия	Относительно осей x-ов и y-ов.
2. Интервал изменения переменных	$y = \pm\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$ x: $-\infty$ -1 0. . $+1$. . $+\infty$ y: ± 1. . . ∞ 0. . $\pm\infty$ Бесконечные ветви. Между $x = -1$ и $x = 1$ кривая не существует.
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках $(\pm 1, 0)$ Ось y-ов не пересекает.
4. Вершины	$y' = \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ Из выражения y′ непосредственно видно, что вершин у кривой нет. При $x = \pm 1$ $y' = \infty$, след-но ось x-ов кривая пересекает под прямым углом.
5. Точки перегиба	$y'' = -\frac{3x^2-2}{x^2(x^2-1)}$, $3x^2 - 2 = 0$; $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ Т. к. корни y″ — числа мнимые, то очевидно, точек перегиба у кривой нет.
6. Ассимптоты	$x^2y^2 - x^2 + 1 = 0$; $y = 1$, $y = -1$ — ассимптоты параллельные осям Наклонных асс-т нет.
7. Особые точки	Система $\begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2x^2y = 0 \\ y^2x^2 = x^2 - 1 \end{cases}$ не имеет решений, след-но особых точек у кривой нет.

11. Формуляр кривой $(y-x^2)^2=x^5$

1 Симметрия	Нет.
2 Интервал изменения перемен-ных	$y=x^2(1\pm\sqrt{x})$ x: $-\infty$, 0 $+\infty$ y: 0 .. $\pm\infty$ Бесконечные ветви. Между $x=-\infty$ и $x=0$ кривая не существует
3. Пересече-ние с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и (1,0) Ось y-ов в точке (0,0).
4 Вершины	$y'=2x\pm\frac{5}{2}x\sqrt{x}$, $2x\pm\frac{5}{2}x\sqrt{x}=0$; $x_1=0$; $x_2=\frac{16}{25}$ При $x_1=0$ $y'=0$, но слева от точки (0,0) кривая не существует, след-но точка (0,0) не может быть вершиной. При $x=\frac{16}{25}$ $y'=2x+\frac{5}{2}x\sqrt{x}=0$, но знака не меняет При $x=\frac{16}{25}$ $y'=2x-\frac{5}{2}x\sqrt{x}=0$ и меняет знак с + на −, след-но в точке $\left(\frac{16}{25},0{,}1\right)$ — верш y_{max}
5 Точки перегиба	$y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}$, $x=\frac{64}{225}$ При $x=\frac{64}{225}$ $y''=2+\frac{15}{4}\sqrt{x}=0$, но знака не меняет При $x=\frac{64}{225}$ $y''=2-\frac{15}{4}\sqrt{x}=0$ и меняет знак с + на −, след-но в точке $\left(\frac{64}{225},y\right)$ — перетиб с вогнуто-сти на выпуклость
6 Ассимптоты	$y^2-2x^2y+x^4-x^5=0$ Ассимптот нет
7, Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4y+12x^2-20x^2=0$ $\Big\vert_{\substack{x=0\\y=0}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4x=0$ $\Big\vert_{x=0}$ Т. о $\Delta=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$ $=0-2{,}0=0$, след-но в начале коор-т — точка возврата с касательной $y^2=0$ Из у-ния $y=x^2(1+\sqrt{x})$ следует, что при $x<1$ $y>0$ для обоих ветвей, но в таком случае, вблизи начала обе ветви лежат по одну сторону оси x-ов и, слех-но, начало является точкой возврата 2-го рода

Смотрите черт 248

12. Формуляр кривой: $ay^2 = x(x^2 - a^2)$*) („Ньютонова колокольчиковидная парабола".)

1 Симметрия	Относительно оси x-ов
2 Интервал изменения переменных	$y = \pm\sqrt{\frac{(x^2 - a^2)x}{a}}$ x | $-\infty$. $-a$. 0 . a . $+\infty$ y | . 0 . 0 0 . $\pm\infty$ Между $x = -\infty$ и $x = -a$, а также между $x = 0$ и $x = a$ кривая не существует
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и $(\pm a, 0)$. Ось y-ов — в начале
4 Вершины	$y' = \frac{3x^2 - a^2}{2ay}$, $3x^2 - a^2 = 0$; $x_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{a\sqrt{3}}{3}$ При $x_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $y' = 0$, но в точке $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, y\right)$ кривая не существует. При $x_2 = -\frac{a\sqrt{3}}{3}$ $y' = 0$ и $f''_{xx} f'_y > 0$, след-но в точке $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a}{4}\sqrt[4]{12}\right)$ — верш. y_{max}, в силу симметрии кривой в точке $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}, -\frac{a}{4}\sqrt[4]{12}\right)$ — верш y_{min} При $x = a$ $y' = \infty$, след-но в точке (a, 0) кривая перпендикулярна к оси x-ов
5 Точки перегиба	У-ние тессианы $\begin{vmatrix} -6x, & 0, & -2a^2 \\ 0, & 2a, & 2ay \\ -2a^2, & 2ay, & -2a^2x \end{vmatrix} = 0$ или $3ax^2 + 3xy^2 - a^3 = 0$ Решая систему; $\begin{cases} 3ax^2 + 3xy^2 - a^3 = 0 \\ ay^2 = x(x^2 - a^2) \end{cases}$, находим $x = a\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ и $y = \pm a\frac{\sqrt[4]{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[8]{27}}$ Т. о кривая имеет две точки перетиба
6 Ассимптоты	Ассимптот нет.
7 Особые точки	Т. к система: $\begin{cases} 3x^2 - a^2 = 0 \\ 2ay = 0 \\ ay^2 = x(x^2 - a^2) \end{cases}$ не имеет решений, то особых точек у кривой нет.

*) $a > 0$.

Смотрите черт. 249

13. Формуляр кривой: $y^3 - x^3 + 3ax^2 = 0$ $(a > 0)$

1 Симметрия	Нет.
2. Интервал изменения переменных	$y = \sqrt[3]{x^3 - 3ax^2}$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty \ldots, & 0 \ldots & +\infty \\ \hline y & -\infty \ldots & 0 \ldots & +\infty \end{array}$ Бесконечные ветви!
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и (3a,0) Ось y-ов в начале
4. Вершины	$y' = -\dfrac{3x^2 + 6ax}{3y^2}$, $3x^2 + 6ax = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2a$ При $x_1 = 0$ $y' = \dfrac{0}{0}$, слев-но начало — особая точка При $x_2 = 2a$ $y' = 0$ и меняет знак с — на +, след-но в точке $\left(2a, -a\sqrt[3]{4}\right)$ верш y_{min} При $x = 3a$ $y' = \infty$, след-но в точке (3a, 0) кривая перпендикулярна к оси x-ов
5 Точки перегиба	У-ние тессианы $x^2y = 0$ Решая систему $\begin{cases} x^2y = 0 \\ y^3 - x^3 + 3ax^2 = 0 \end{cases}$ находим точку перегиба (3a, 0)
6 Ассимптоты	Ассимптот параллельных осям нет $(mx + b)^3 - x^3 + 3ax^2 = 0$ $m^3 - 1 = 0$; $3m^2b + 3a = 0$ $m = 1$ $b = -a$ Т о имеется наклонная ассимптота: $y = x - a$
7. Особые точки	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 6a \underset{\mid x = 0}{=} 6a$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \underset{\mid y = a}{=} 0$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т о. $\Delta = 0$, след-но в начале кривая имеет точку возврата с касательными $x^2 = 0$

Смотрите черт 250

14. Формуляр кривой $x^3 - ax^2 - ay^2 = 0$ $(a > 0)$

1 Симметрия	Относительно оси x-ов
2 Интервал изменения переменных	$y = \pm x\sqrt{\frac{x-a}{a}}$ x: $-\infty$ | 0 | a | $+\infty$ y: | 0 | 0 | $\pm\infty$ Бесконечные ветви. Между $x = -\infty$ и $x = a$ кривая не существует
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0;0) и (a;0) Ось y-ов в начале
4 Вершины	$y' = -\frac{3x^2 - 2ax}{-2ay}$, $3x^2 - 2ax = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2a}{3}$ При $x_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-но в начале особая точка При $x_2 = \frac{2a}{3}$ $y' = 0$, но в точке $\left(\frac{2a}{3}, y\right)$ кривая не существует Т. к. при $x = a$ $y' = \infty$, то, очевидно, кривая пересекает ось x-ов под прямым углом
5 Точки перегиба	У-ние тессианы: $3xy^2 - x^2 = 0$ Решая систему: $\begin{cases} 3xy^2 - x^2 = 0 \\ x^2 - ax^2 - ay^2 = 0 \end{cases}$, находим две точки перегиба $\left(\frac{4a}{3}; \frac{4a\sqrt{3}}{9}\right)$ и $\left(\frac{4a}{3}; -\frac{4a\sqrt{3}}{9}\right)$
6 Ассимптоты	Ассимптот нет
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a = -2a$ при $x = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т. к $\Delta = 0 - (-2)(-2a) = -4a < 0$, то в начале коорд-т кривая имеет изолированную точку

Смотрите черт 25f.

15. Формуляр кривой: $x^4 + xy^3 - ay^3 = 0$ $(a > 0)$

1 Симметрия — Нет

2. Интервал изменения переменных

$$y = x\sqrt[3]{\frac{x}{a-x}}$$

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$\pm\infty$	$-\infty$

Бесконечные ветви. При $x = a$ — разрыв

3 Пересечение с осями — Только в начале!

4 Вершины

$$y' = -\frac{4x^3 + y3}{3xy^2 - 3ay^2} \quad \begin{cases} 4x^3 + y_2 = 0 \\ x^4 + xy_2 - ay^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{4a}{3} \\ y = -\frac{4a}{3}\sqrt[3]{4}. \end{matrix}$$

При $x = \frac{4a}{3}$ и $y = -\frac{4a}{3}\sqrt[3]{4}$ $y' = 0$ и т. к. $f''_{xx} \cdot f'_y < 0$, то в точке $\left(\frac{4a}{3}; -\frac{4a}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — вершина y_{min}

При $x = 0$ и $y = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-но в начале особая точка

5 Точки перегиба — Совместное решение у-ний гессианы и кривой дает корни $x = 0$ и $y = 0$, но начало является особой точкой, как это уже было замечено выше

6. Ассимптоты

$x = a$ — ассимптота $\parallel$ оси y-ов

$x^4 + x(mx + b)^3 - a(mx + b)^3 = 0$

$1 + m^3 = 0;\quad 3m^2b - am^3 = 0$

$m = -1;\quad b = -\frac{a}{3}$ Т о. кривая имеет наклонную асс-ту $y = -x - \frac{a}{3}$

7 Особые точки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 = 0 \Big|_{x=0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy - 6ay = 0 \Big\}_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 = 0 \Big|_{y=0}$$

Т о. начало коорд-т является тройной точкой с тремя совпавшими касательными. („точка сплющенности")

Смотрите черт. 252.

16. Формуляр кривой: $x^4 - ax^3 + ay^2 = 0$ $(a > 0)$

1. Симметрия	Нет
2. Интервал изменения переменных	$y = x\sqrt[3]{\frac{a-x}{a}}$ x: $-\infty \ldots 0 \ldots a \ldots +\infty$ y: $-\infty \ldots 0 \ldots 0 \ldots -\infty$ Бесконечные ветви.
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и (a,0) Ось y-ов в начале.
4. Вершины	$y' = -\frac{4x^3 - 3ax^2}{3ay^2}$, $4x^2 - 3ax^2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3a}{4}$ При $x_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-но в начале особая точка. При $x_2 = \frac{3a}{4}$ и $y = \frac{3a}{8}\sqrt[3]{2}$ $y' = 0$ и т. к. при этом: $f''_{xx} f'_y > 0$, то в точке: $\left(\frac{3a}{4} \cdot \frac{3a}{8}\sqrt[3]{2}\right)$ — верш. умах.
5 Точки перегиба	У-ние гессианы: $2xy^2 - ay^2 + ax^3 = 0$. Решив систему: $\begin{cases} x^4 - ax^3 + ay^2 = 0 \\ 2xy^2 - ay^2 + ax^3 = 0 \end{cases}$, находим точку перегиба: $\left(\frac{3a}{2}, -\frac{3a}{4}\sqrt[3]{4}\right)$
6. Ассимптоты	Ассимптот нет.
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 6ax \underset{\mid x=0}{=} 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6ay \underset{\mid y=0}{=} 0$ Т о начало является тройной точкой с касательными: $x^3 - y^3 = 0$ („точки сплющенности").

Смотрите черт. 253.

17. Формуляр кривой: $x^3 - ax^2 + ay^2 = 0$ $(a > 0)$

1 Симметрия	Относительно оси x-ов.
2 Интервал изменения переменных	$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a}}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & a & +\infty \\ \hline y & \pm\infty & & 0 & 0 & \end{array}$ Бескопечные оетои Между $x = a$ и $x = +\infty$ кривая не сущестоует
3 Пересечение с осями	Ось x-ов о точках (0,0) п (a,0) Ось y-ов—вначале
4 Вершины	$y' = -\frac{3x^2 - 2ax}{2ay}$, $3x^2 - 2ax = 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2a}{3}$ При $x_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, слех-но о начале особая точка При $x_2 = \frac{2a}{3}$ и $y = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$ $y' = 0$ и т к при этом $f''_{xx} f'_y > 0$, то в точке $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)$ — верш. y_{max}, в силу симметрии п точке $\left(\frac{2a}{3}; -\frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)$ — верш y_{min} При $x = a$ $y' = \infty$, след-но в точке (a,0) кривая перпендикулярна к оси x-ов.
5 Точки перегиба	У-пие гессианы $\begin{vmatrix} 6x - 2a, & 0, & -2ax \\ 0, & 2a, & 2ay \\ -2ax, & 2ay, & 0 \end{vmatrix} = 0.$ решая его совместно с у-нием кривой, заметим, что корни системы — числа мнимые, след-но точек перегиба у криоой пет
6 Ассимптоты	Ассимптот иет
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a \underset{\|\, x=0}{=} -2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т к $\Delta = 0 - (-2a)(2a) = 4a^2 > 0$, то вначале—двойная точка (‚узел") с касательными $y = x$ и $y = -x$

Смотрите черт 254

18. Формуляр кривой: $x^4 - ax^2y + ay^3 = 0$ $(a > 0)$

1. Симметрия	Относительно оси y-ов.
2 Интервал изменения переменных	$x = \pm\sqrt{\dfrac{ay \pm y\sqrt{a^2-4ay}}{2}}$ $\begin{array}{c\|l} y & -\infty \ldots\ldots 0 \ldots \\ \hline x & \pm\infty \quad 0 \ldots \end{array}$ Бесконечные ветви!
3. Пересечение с осями	Только в начале
4. Вершины	$y' = -\dfrac{4x^3 - 2axy}{-ax^3 + 3ay^2}$, $\begin{cases} 4x^3 - 2axy = 0 \\ x^4 - ax^2y + ay^3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -ax^3 + 3ay^2 \\ x^4 - ax^2y + ay^3 = 0 \end{cases}$ Из 1-ой системы находим: $\left(\pm\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; \dfrac{a}{4}\right)$ — верш y_{max} Из 2-й системы $\left(\dfrac{2}{9}a\sqrt{3}, \dfrac{2}{9}a\right)$ — верш. x_{max} и $\left(-\dfrac{2}{9}a\sqrt{3}, \dfrac{2}{9}a\right)$ — верш. x_{min}. При $x = 0$ $y = 0$ $y' = \dfrac{0}{0}$, след-но в начале — особая точка
5 Точки перегиба	Точек перегиба нет
6. Ассимптоты	Ассимптот нет.
7. Особые точки	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2ay = 0 \quad \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{vmatrix}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6ay = 0 \quad \begin{vmatrix} y = 0 \end{vmatrix}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2ax = 9 \quad \begin{vmatrix} x = a \end{vmatrix}$ Т. о. в начале коорд-т кривая имеет тройную точку с касательными. $y = 0$ и $y = \pm x$.

Смотрите черт. 255.

19. Формуляр кривой: $x^4+y^4-2axy^2=0$ $(a>0)$

1. Симметрия	Относительно оси x-ов.
2. Интервал изменения переменных	$y=\pm\sqrt{x(a\pm\sqrt{a^2-x^2})}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & -a & 0 & +a & +\infty \\ \hline y & & \pm a & 0 & \pm a & \end{array}$ Между $x=-\infty$ и $x=-a$, а также между $x=a$ и $x=+\infty$ кривая не существует. Кривая замкнута.
3. Пересечение с осями	Только в начале.
4. Вершины	$y'=-\dfrac{4x^3-2ay^2}{4y^3-4axy}$, $\begin{cases} 4x^3-2ay^2=0 \\ x^4+y^4-2axy^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4y^3-4axy=0 \\ x^4+y^4-2axy^2=0 \end{cases}$ Из 1-ой системы находим $\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\pm\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ — вершины y-ов, а из 2-ой системы $\left(\sqrt{\dfrac{a}{a}};\pm\sqrt[4]{a}\right)$ — вершины x-ов
5 Точки перегиба	Точек перегиба нет.
6. Ассимптоты	Ассимптот нет.
7 Особые точки	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2=0 \Big\vert_{x=0}$ $-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4ax=0 \Big\vert_{\substack{x=0 \\ y=0}}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4ay=0 \Big\vert_{y=0}$ Т. о. в начале коорд-т кривая имеет тройную точку с касательными. $xy^3=0$ или $x=0$ и $y^3=0$.

Смотрите черт. 256.

28. Формуляр кривой: $x^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0$ $(a > 0)$

1 Симметрия	Относительно осей x-ов и y-ов
2 Интервал изменения перемен-ных	$y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ | x | $-\infty$ | $-a$ | 0 | $+a$ | $+\infty$ | | y | | 0 | 0 | 0 | | Кривая замкнута!
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и $(\pm a, 0)$ Ось y-ов—вначале
4 Вершины	$y' = -\frac{4x^3 - 2a^2x}{2a^2y}$, $4x^3 - 2a^2x = 0$; $x_1 = 0$ и $x_2 = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$ При $x_1 = 0$ $y_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-но вначале особая точка При $x_2 = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{a}{2}$ $y' = 0$ и т. к. при этом $f''_{xx} f'_y > 0$, то в точках $\left(\pm \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}\right)$—верш y_{max} При $x_2 = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $y = -\frac{a}{2}$ $y' = 0$ и $f''_{xx} f'_y < 0$, след-но в точках $\left(\pm \frac{a\sqrt{2}}{a}, -\frac{a}{2}\right)$ — верш. y_{min} Подобно этому находим вершины x-ов $(\pm a, 0)$. При $x = \pm a$ $y' = \infty$, след-но в точках $(\pm a, 0)$ кривая перпендикулярна оси x-ов
5 Точки перегиба	На основании исследований во 1-му и 4-му пунктам заключаем, что в начале должен быть двойной перегиб
6 Ассимптоты	Ассимптот нет.
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f 2x^2 - 2a^2 \underset{\mid x=0}{=} -2a^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т к при этом $\Delta = 0 - (-2a^2)2a^2 = 4a^4 > 0$, то в начале кривая имеет узловую точку с касательными $y = \pm x$

Смотрите черт. 257.

21. Формуляр кривой: $x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0$.

1 Симметрия	Относительно оси y-ов
2 Интервал изменения переменных	$x=\pm\sqrt{-4y\pm y\sqrt{(8-y)(2+y)}}$ При $y<0$ необходимо, чтобы $(8-y)(2+y)$ было больше нули, что возможно лишь при $y>-2$ При $y>0$ необходимо, чтобы $4y$ было меньше $y\sqrt{(8-y)(2+y)}$, что возможно лишь при $y<6$ Т о интервал изменения y замкнут $-2<y<6$
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в начале Ось y-ов в точках (0,0) и (0,6)
4 Вершины	$y'=-\dfrac{4y^3+16xy}{4y^3-18y^2+8x^2}$, $\begin{cases}4x^3+16xy=0 & x_1=0;\ x_2=0\ x_3=\pm4\sqrt{2},\ x_4=\pm4\sqrt{2}\\ x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0 & y_1=0;\ y_2=6;\ y_3=8;\ y_4=-2\end{cases}$ При $x_1=0$ и $y_1=0$ $y'=\dfrac{0}{0}$, след-но—вначале-особая точка. При $x_2=0$ и $y_2=6$ $y'=0$ и $f''_{xx}\,f'_y>0$, след-но в точке (0,6) — верш. y_{max} При $x_3=\pm4\sqrt{2}$ и $y_3=8$ $y'=0$, но кривая в точке $(\pm4\sqrt{2},\ 8)$ не существует При $x_4=\pm4\sqrt{2}$ и $y_4=-2$ $y'=0$ и $f''_{xx}\,f'_y<0$, след-но в точке $(\pm4\sqrt{2},\ -2)$ — верш y_{min} Вершины x ов найдем из системы. $\begin{cases}4y^3-18y^2+8x^2=0\\ x^4-y^4-6y^3+8x^2y=0;\end{cases}$ которая приводит к полному y-нию третьей ст относительно y-ка
5. Точки перегиба	Точек перегиба нет
6 Ассимптоты	Ассимптот нет
7. Особые точки	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2+6y=0\ \Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-36y=0\ \Big|_{y=0}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=16x=0\ \Big|_{x=0}$ Т о начало является тройной узловой точкой кривой с касательными. $y=0$ и $2x\pm\sqrt{3}\,y=0$

Смотрите черт. 258

22. Формуляр кривой: $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$ $(a>0)$

1. Симметрия — Относительно оси y-ов.

2. Интервал изменения переменных

$$x=\pm\sqrt{a^2\pm y\sqrt{a(2y+3a)}}$$

y	$-\infty$ .. $\frac{3}{2}a$. 0 . $+\infty$
x	$\pm a$. 0 . $\mp\infty$

Бесконечные ветви

3. Пересечение с осями

Ось x-ов в точках: $(\pm a,0)$

Ось y-ов в точках: $(0,-a)$ и $\left(0,\frac{a}{2}\right)$

4 Вершины

$$y'=-\frac{4x^3-4a^2x}{-6ay^2-6a^2y},\quad \begin{cases}4x^3-4a^2x=0\\ x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0\end{cases}$$

$x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=a;\ x_4=-a$

$y_1=0;\ y_2=\frac{a}{2},\ y_3=0;\ y_4=-\frac{3a}{2}$

При $x_1=0$ и $y_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но вначале—особая точка

При $x_2=0$ и $y_2=\frac{a}{2}$ $y'=0$, и т к при этом

$f''_{xx}\ f'_y>0$, то в точке: $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ — вершина y_{max}.

При $x=\pm a$ и $y_3=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но $(\pm a,0)$—особая точка.

При $x=\pm a$ и $y_4=-\frac{3a}{2}$ $y'=0$, и т. к. при этом

$f''_{xx}\ f'_y<0$, то в точках $\left(\pm a,\frac{3a}{2}\right)$ — верш y_{min}.

$$\begin{cases}-6ay^2-6a^2y=0\\ x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0\end{cases}\quad \begin{matrix}y_1=0\ ,\ y_2=-a\\ x_1=\pm a\ ,\ x_2=\mp a\sqrt{2}\ ;x_3=0\end{matrix}$$

При $x_1=\pm a$ и $y_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но $(\pm a,0)$—особая точка.

При $x_2=a\sqrt{2}$ и $y_2=-a$ $y'=0$, и т.к при этом

$f''_{yy}\cdot f'_x>0$, то в точке $(a\sqrt{2},-a)$—верш x_{max}., в силу симметрии кривой в точке $(-a\sqrt{2},-a)$—верш. x_{min}

При $x_3=0$ и $y_3=-a$ $y'=\frac{0}{0}$, следовательно точка $(0,-a)$ является особой.

5. Точки перегиба — Точек перегиба нет.

6. Ассимптоты — Ассимптот нет.

7 Особые точки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4a^2;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-(2ay-6a^2);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

В 4-ом пункте выявлено, что особые точки суть $(a,0)$, $(-a,0)$ и $(0,-a)$. Для всех этих точек $\Delta>0$, след-но все эти точки являются узловыми.

Смотрите черт. 259.

23. Формуляр кривой: $x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0$ („скифоида") $(a>0)$

1 Симметрия	Относительно оси y-ов.
2 Интервал изменения переменных	$x = \pm\sqrt{2ay \pm y\sqrt{4a^2 + y^2}}$ $\begin{array}{c\|ccc} y & -\infty & 0 & \ldots +\infty \\ \hline x & \pm\infty & \ldots 0 & \pm\infty \end{array}$ Бесконечные ветви
3. Пересечение с осями	Только вначале
4 Вершины	$y' = -\dfrac{4x^3 - 8axy}{-4y^3 - 4ax^2}$; $\begin{cases} 4x^3 - 8axy = 0 \\ x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -4y^3 - 4ax^2 = 0 \\ x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0 \end{cases}$ Корни той и другой системы мнимы, след-но кривая не имеет вершин. При $x = 0$ и $y = 0$ $y' = \dfrac{0}{0}$, след-но вначале—особая точка
5 Точки перегиба	У-ние гессианы $x^4 - 4y^4 + 2ax^2y = 0$ Решая систему $\begin{cases} x^4 - 4y^4 + 2ax^2y = 0 \\ x^4 - y^4 - 4ax^2y = 0 \end{cases}$ находим две точки перегиба $\left(\pm 2a\sqrt[4]{27}\,,\ 2a\sqrt{3}\right)$
6. Ассимптоты	Ассимптот параллельных коорд-м осям нет $x^4 - (mx + b)^4 - 4x^2(mx + b) = 0$ $1 - m^4 = 0;\ -4m^3b - 4am = 0$ $m = \pm 1 \qquad b = -a$ Т. о. кривая имеет наклонные ассимптоты: $y = \pm x - a$
7 Особые точки	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y = 0 \quad \Big\vert \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 - 8x = 0 \quad \Big\vert \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8ax = 0 \quad \Big\vert\, x=0$ Т. о. начало является тройной точкой с касательными $x^3 = 0$ и $y = 0$

Смотрите черт. 260.

24. Формуляр кривой: $xy^2-a(x+y)^2=0$ („кривая Роля") $(a>0)$

1. Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$y=\frac{ax\pm x\sqrt{ax}}{2(x-a)}$ x | $-\infty$ 0 a $+\infty$ y 0 $\pm\infty$ $\pm\infty$ Кривая существует только при $x>0$. При $x=a$ — разрыв
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точке (0,0), также и ось y-ов Прямую x-а кривая пересекает в точке $\left(a,-\frac{a}{2}\right)$
4 Вершины	$y'=-\frac{y^2-2ax-2ay}{2xy-2ax-2ay}$, $\begin{cases} y^2-2ax-2ax-2ay=0 & x_1=0;\ x_2=4a \\ xy^2-ax^2-2axy-ay^2=0 & y_1=0;\ y_2=4a \end{cases}$ При $x_1=0$ и $y_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$ — след-но вначале — особая точка При $x_2=4a$ и $y_2=4a$ $y'=0$ и, т к при этом $f''_{xx}\ f'_y<0$, то в точке (4a, 4a) — верш. y_{min}.
5 Точки перегиба	Точек перегиба нет
6. Ассимптоты	Одна ассимптота $x=a$
7. Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x-2a\Big\|_{x=0}=-2a$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y-2a\Big\|_{y=0}=-2a$ Т к $\Delta=4a^2-4a^2=0$, то вначале точка возврата с касательной $y=-x$

25. Формуляр кривой: $x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$ $(a > 0)$ („периформа") $(b > 0)$

1 Симметрия	Относительно оси x-ов
2 Интервал изменения перемен-ных	$y = \pm \frac{x\sqrt{x(a-x)}}{b}$ | x | $-\infty$ 0 a $+\infty$ | | y | 0 0 | кривая замкнута и лежит в области $0 < x < a$
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0,0) и (a,0) Ось y-ов—вначале
4 Вершины	$y' = -\frac{4x^3 - 3ax^2}{2b^2y}$, $\begin{cases} 4x^3 - 3ax^2 = 0 & x_1 = 0;\ x_2 = \frac{3a}{4} \\ x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0 & y_1 = 0;\ y_2 = \pm\frac{3a^2\sqrt{3}}{16b} \end{cases}$ При $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-но вначале—особая точка При $x_2 = \frac{3a}{4}$ и $y_2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}$ $y' = 0$, и т к при этом $f''_{xx} f'_y > 0$, то в точке $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}\right)$ — верш y_{max}, в силу симметрии кривой в точке $\left(\frac{3a}{4}, -\frac{3a^2\sqrt{3}}{16b}\right)$ — верш y_{min} При $x = a$ $y = 0$ $y' = \infty$, след-но ось x-ов кривая пересекает под прямым углом
5 Точки перегиба	У-ние гессианы $6b^2xy^2 - 3ab^2y^2 + 2a^2x^3 = 0$ Решая систему $\begin{cases} 6b^2xy^2 - 3ab^2y^2 + 2a^2x^3 = 0 \\ x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0 \end{cases}$, находим две точки перегиба $\left(x_1, \pm\sqrt{\frac{a^2x_1^2}{4ab^2 - 8b^2x_1}}\right)$, где $x_1 = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{3})$
6 Ассимптоты	Ассимптот нет
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 6ax = 0$ при $x = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ Т к $\Delta = 0$, то вначале кривая имеет точку возврата с касательной $y^2 = 0$

Смотрите черт 262

26. Формуляр кривой: $y^2x - ax^2 - by^2 = 0$ („смешанная кубика")

1. Симметрия	Относительно оси x-ов
2. Интервал изменения переменных	$y = x\sqrt{\frac{a}{x-b}}$ 1) $a>0$, $b>0$ x: $-\infty$. 0 .b....$+\infty$ y: 0 $\pm\infty$ ..$\pm\infty$ Бесконечные ветви. 2) $a>0$, $b<0$ x: $-\infty$ $-b..0$ $+\infty$ y: $\pm\infty$. 0. . $\pm\infty$
3. Пересечение с осями	Только вначале
4 Вершины	$y' = -\frac{y^2-2ax}{2xy-2by}$, $\begin{cases} y^2-2ax=0 \\ y^2x-ax^2-by^2=0 \end{cases}$ $x_1=0$ $x_2=2b$ $y_1=0$ $y_2=\pm 2\sqrt{ab}$. Если $ab>0$, то при $x_2=2b$ и $y_2=2\sqrt{ab}$ $y'_x=0$, и т.к. при этом $f''_{xx}\,f'_y>0$, то в точке $(2b, 2\sqrt{ab}$ — верш. y_{min}. В силу симметрии кривой о точке $(2b, -2\sqrt{ab})$ — верш y_{max} Если $ab<0$, то вершин у кривой нет При $x_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но вначале — особая точка.
5. Точки перегиба	У-ние гессианы $b^2y^2-2bxy^2-ax^2+abx^2=0$ Решая систему $\begin{cases} b^2y^2-2bxy^2-ax^2+abx^2=0 \\ -by^2+xy^2-ax^2=0 \end{cases}$, найдем: $x=4b$ и $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{3ab}$. Очевидно, при $ab>0$ кривая, будет иметь две точки перегиба, при $ab<0$ точек перегиба не будет.
6. Ассимптоты	Одна ассимптота $x=b$.
7 Особые точки	$\Delta = 0-(-2a)(-2b) = -4ab$ Т. о при $ab>0$ вначале изолированная точка, а при $ab<0$ вначале узел с касательными $ax^2+by^2=0$.

Смотрите черт. 263.

27. Формуляр кривой: $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$
(„подэра эллипса")

1. Симметрия	Относительно осей x-ов и y-ов.
2 Интервал изменения перемен-ных	$y = \pm\sqrt{\frac{-(2x^2-b^2) \pm \sqrt{b^4-4(b^2-a^2)x^2}}{2}}$, $x = \pm\sqrt{\frac{-(2y^2-a^2) \pm \sqrt{a^4-4(a^2-b^2)y^2}}{2}}$ Т к интервал по x-су и y-ку ограничен, то кривая замкнута
3. Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0.0) и $(\pm a, 0)$ Ось y-ов в точках (0,0) и $(0, \pm b)$
4 Вершины	$y' = -\frac{4x^3+4xy^2-2a^2x}{4x^2y+4y^3-2b^2y}$; $\begin{cases} 4x^3+4xy^2-2a^2x=0 \\ (x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2 \end{cases}$ $x_1=0;\ x_2=0;\ x_3 = \pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}$ $y_1=0;\ y_2=\pm b;\ y_3 = \pm\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$ При $x_1=0$ и $y_1=0$ $y'=\frac{0}{0}$, след-но вначале—особая точка При $x_2=0$ и $y_2=b$ $y'=0$, и т.к. при этом $f''_{xx}\,t'_y<0$, то в точке $(0,b)$ верш y_{min}, в силу симметрии в точке $(0,-b)$ — верш. y_{max} В силу симметрии кривой следует также, что в точках (x_3, y_3) при $y_3>0$ будут вершины y_{max}, а при $y_3<0$ — верш y_{min} При этом, если $b^2<a^2<2b^2$, эти вершины будут минимум $\begin{cases} 4x^2y+4y^2-2b^2y=0 & x_1=0;\ x_2=\pm a \\ (x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2 & y_1=0;\ y_2=0 \end{cases}$, $x_3 = \frac{\pm b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$ $y_3 = \pm\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^2-2a^2}{b^2-a^2}}$ После исследования устанавливаем, что в точке $(a,0)$ — верш x_{max}, а в точке $(-a,0)$ — верш. x_{min}, в точках (x_3, y_3), при $x_3>0$ — вершина x_{max}, а при $x_3<0$ — верш x_{min}, но, очевидно, эти вершины при $a^2<b^2<2a^2$ окажутся минимумами
5. Точки перегиба	У-ние гессианы $y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}}$, решая это у-ние совместно с у-нием кривой, найдем 4 точки перегиба При $\frac{b^2}{2} \leqslant a^2 \leqslant 2b^2$ перегибов не будет
6 Ассимптоты	Ассимптот нет
7. Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2+4y^2-2a^2 = -2a^2$ $\Big\vert_{\substack{x=0\\y=0}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2+8y-2b^2 = -2b^2$ $\Big\vert_{\substack{x=0\\y=0}}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 8xy = 0$ $\Big\vert_{\substack{x=0\\y=0}}$ Т и $\Delta=0-4a^2b^2<0$, то вначале всегда у кривой будет изолированная точка

Смотрите черт. 264

28. Формуляр кривой: $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$ $(a > 0)$

1. Симметрия

Относительно осей x-oo и y-oo

2. Интервал изменения переменных

$$y = \pm \frac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

x	$-\infty$	$-a$	0	$+a$	$+\infty$
y		0	0	0	

Кривая существует только между $x = -a$ и $x = a$.

3. Пересечение с осями

Ось x-oo в точках (0,0) и $(\pm a, 0)$
Ось y-ов — в начале

4. Вершины

$$y' = \frac{4a^2x^3 + 6x^5}{2a^4y} \quad \begin{cases} 4a^2x^3 + 6x^5 = 0 & x_1 = 0; \\ a^4y^2 = a^2x^4 - x^6 & y_1 = 0; \end{cases}$$

$$x_2 = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad y_2 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

При $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ $y' = \frac{0}{0}$, след-ов, вначале — особая точка.

При $x_2 = \pm \frac{a\sqrt{6}}{3}$ и $y_2 = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$ $y' = 0$ и, т к при этом $f''_{xx} f'_y > 0$, то в точках $\left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{3}, \frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)$ — верш y_{max}, в силу симметрии кривой в точках $\left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{3}, -\frac{2a\sqrt{3}}{9}\right)$ — верш y_{min}

$$\begin{cases} 2a^4y = 0 & x_1 = 0; \quad x_2 = \pm a \\ a^4y^2 = a^2x^4 - x^6 & y_1 = 0; \quad y_2 = 0 \end{cases}$$

При $x_2 = a$ и $y_2 = 0$ $y' = 0$ и $f'_{yy} f'_x > 0$, след-но в точке (a,0) верш x_{max}, в силу симметрии кривой в точке $(-a, 0)$ — верш. x_{min}

5. Точки перегиба

Решая систему $\begin{vmatrix} 30x^4 - 12a^2x^2; & 0 & ; & -8a^2x^3 \\ 0 & ; & 2a^4; & 8a^4y \\ -8a^2x^3 & , & 8a^4y, & 24a^4y \end{vmatrix} = 0$

$a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$

найдем четыре точки перегиба

6. Ассимптоты

Ассимптот нет

7. Особые точки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x^4 - 12a^2x^2 = 0 \quad \Big|_{x=0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Т к $\Delta = 0$, то в начале кривая имеет точку возврата с касательными $y^2 = 0$

В силу симметрии кривой в отношении оси y-ов, возврат кривой будет с обеих сторон и начало т. в будет точкой самоприкосновения

Смотрите черт 265.

29. Формуляр кривой: $(x^2+y^2)y^2=a^2x^2$ („каппа") $(a>0)$

1 Симметрия	Относительно осей x-во и y-оо
2 Интервал изменения переменных	$x=\frac{y^2}{\pm\sqrt{a^2-y^2}}$ $\begin{array}{c\|ccccc} y & -\infty & -a & 0 & \pm a & +\infty \\ \hline x & & \pm\infty & 0 & \pm\infty & \end{array}$ Бесконечные ветви Разрыв
3 Пересечение с осями	Только вначале
4 Вершины	Вершин нет
5 Точки перегиба	Вначале двойной перегиб
6 Ассимптоты	Две ассимптоты $x=\pm a$
7 Особые точки	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^2-2a^2 \underset{\|y=0}{=}-2a^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2+2x^2=0 \underset{\|y=0}{\|x=0}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy=0 \underset{\|y=0}{\|x=0}$ Т к $\Delta=0$, то вначале кривая имеет точку возврата с касательными $x^2=0$, о силу симметрии кривой эта точка будет точкой самоприкосновения

Смотрите черт 266

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КРИВЫХ

30. Формуляр кривой: $y = x\lg x$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & 1 & +\infty \\ \hline y & & & 0 & 0 & +\infty \end{array}$ $\lim\limits_{\substack{y \\ x=0}} y = \lim x\lg x = \lim \dfrac{\lg x}{1/x} = \lim(-x) = 0$
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках (0, 0) и (1, 0) Ось y-ов – вначале
4. Вершины	$y' = 1 + \lg x;\quad 1 + \lg x = 0;\quad x = e^{-1},\quad y = -e^{-1}$ При $x = e^{-1}$ $y' = 0$ и $y'' > 0$, след-но в точке $(e^{-1}, -e^{-1})$ – верш y_{min}
5 Точки перегиба	$y'' = \dfrac{1}{x}$ Из выражения y'' видно, что точек перегиба у кривой нет
6 Асимптоты	Т к ни при каких конечных значениях одного из переменных другое не обращается в бесконечность, то асимптот параллельных осям нет Наклонных асимптот также нет, т к $\lim\limits_{x\to} \dfrac{f(x)}{x} = \lim \lg x = \infty$
7 Особые точки	Начало коорд-т является для кривой точкой прегиба

Смотрите черт. 267

31. Формуляр кривой: $y = \frac{1}{\lg x}$;

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x & -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ \hline y & & 0 & \pm\infty & 0 \\ \hline \end{array}$ $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\lg x} = \begin{cases} -\infty \text{ при } x<1 \\ +\infty \text{ при } x>1 \end{cases}$
3. Пересечение с осями	Только в начале
4 Вершины	$y' = -\frac{1}{x\lg^2 x}$ Из выражения y' видно, что вершин у кривой нет
5. Точки перегиба	$y'' = \frac{2+\lg x}{x^2\lg^3 x}$, $2+\lg x = 0$; $x = e^{-2}$, $y = -\frac{1}{2}$ При $x = e^{-2}$ $y'' = 0$ и меняет знак с + на −, след-но в точке $\left(e^{-2}, -\frac{1}{2}\right)$ перегиб с вогнутости на выпуклость.
6 Ассимптоты	Т и $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$, то, очевидно, кривая имеет ассимптоту $x = 1$. Т к $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, то кривая имеет ассимптоту $y = 0$ Наклонных ассимптот нет
7 Особые точки	Начало является для кривой точкой прекращения

Смотрите черт 268

32. Формуляр кривой: $y = xe^x$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline y & 0 & 0 & +\infty \\ \hline \end{array}$ $\lim y = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$
3 Пересечение с осями	Только в начале
4 Вершины	$y' = xe^x + e^x;\ e^x(x+1),\ x=-1;\ y=-\dfrac{1}{e}$ При $x = -1$ $y' = 0$ и меняет знак с — на +, след-но, в точке $(-1, -e^{-1})$ верш y_{min}
5 Точки перетиба	$y'' = xe^x + 2e^x,\ e^x(x+2) = 0;\ x = -2;\ y = -2e^{-2}$ При $x = -2$ $y'' = 0$ и меняет знак с + на —, след-но в точке $(-2, -2e^{-2})$ — перетиб с вогнутости на выпуклость
6 Ассимптоты	Ассимптот параллельных осям нет. Наклонных ассимптот также нет, т к $\lim \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$
7 Особые точки	Нет

Смотрите черт 269

33. Формуляр кривой: $y = \frac{e^x}{x}$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & \ldots & 0 & & +\infty \\ \hline y & 0 & \ldots & \pm\infty & \ldots & +\infty \end{array}$ $\lim y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{при } x < 0 \\ +\infty & \text{при } x > 0 \end{cases}$ $\lim y = \lim \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$
3 Пересечение с осями	Пересечения нет
4. Вершины	$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$, $e^x(x-1) = 0$; $x = 1$, $y = e$ При $x = 1$ $y' = 0$ и меняет знак с $-$ на $+$, следно, о точке $(1, e)$ — верш. y_{min}
5 Точки перетиба	$y'' = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4}$; $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ $x_1 = 0$ $x_{2,3} = 1 \pm i$ Очевидно кривая не имеет точек перетиба
6 Ассимптоты	Ассимптоты параллельные осям $x = 0$ и $y = 0$ Наклонных ассимптот нет.
7 Особые точки	Нет

Смотрите черт. 270

34. Формуляр кривой: $y = x^2 e^{-x}$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x & -\infty & & 0 & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & 0 & \searrow\ 0 \\ \hline \end{array}$ $\lim y = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim \frac{x^2}{e^x} = \lim \frac{2x}{e^x} = \lim \frac{2}{e^x} = 0$
3 Пересечение с осями	Только о начале
4 Вершины	$y' = -x^2 e^{-x} + 2xe^{-x}$ $e^{-x}x(2-x)=0$; $x_1=0$ $x_2=2$ $y_1=0$ $y_2=4e^{-2}$ При $x_1 = 0$ $y' = 0$ и меняет знак с — на +, след-но, о точке (0,0) верш y_{min} При $x_2 = 2$ $y' = 0$ и меняет знак с + на —, след-но, о точке $(2,4e^{-2})$ — верш y_{max}
5 Точки перегиба	$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $x^2 - 4x + 2 = 0$; $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ При $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ $y'' = 0$ и меняет знак с + на —, след-но, о точке $(2 + \sqrt{2}, y)$ — перетиб с вогнутости на выпуклость При $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ — перетиб с выпуклости на вогнутость
6 Ассимптоты	Из 2-го пункта видно, что у кривой есть ассимптота $y = 0$ Наклонных ассимптот нет
7 Особые точки	Нет

Смотрите черт 271.

35. Формуляр кривой: $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

1. Симметрия	Нет
2. Интервал изменения переменных	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline x & -\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty \\ \hline y & -\infty \ldots\ldots 0 \ldots\ldots +\infty \\ \hline \end{array}$ $\lim y = \lim \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ $\lim y = \lim \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$ $x \to -\infty$ $x \to +\infty$
3 Пересечение с осями	Только в начале
4 Вершины	$y' = \dfrac{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)+e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$; $x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)+e^{\frac{1}{x}} = 0$, у-ние это не имеет корней, в чем можно убедиться, решив его графически, положив, $y_1 = x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)$ и $y_2 = -e^{\frac{1}{x}}$ Найдем значение y' в точке (0,0) Пусть $y = kx$ — у-ние касательной к нашей кривой в начале, тогда $k = \dfrac{y}{x}$ и, след-но, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ Зная это, имеем $y' = \lim \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$ $x \to -0$ $y' = \lim \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ $x \to +\infty$ Т о оказывается, что в начале координат кривая имеет две различные касательные $y = x$ и $y = 0$
5 Точки перегиба	Нет
6 Ассимптоты	Ассимптот параллельных осям нет $m = \lim \dfrac{f(x)}{x} = \lim \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2}$, $x \to \infty$ $b = \lim [f(x) - mx] = \lim \left[\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \dfrac{x}{2}\right] = -\dfrac{1}{2}$ $x \to \infty$ Т о кривая имеет наклонную ассимптоту $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$
7. Особые точки	Из пункта 2-го следует, что вначале кривая непрерывна, а из 4-го — что вначале она имеет две различных касательных, из этого следует, что начало является для кривой угловой точкой

Смотрите черт 272

36. Формуляр кривой: $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

1 Симметрия	Нет
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y & +\frac{1}{2} & & +1 \\ & & & 0 & & +\frac{1}{2} \end{array}$ $\lim y = \lim \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1 \quad x \to -\infty$ $\lim y = \lim \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad x \to +0$ Точки (0,0) и (0,1) являются особыми
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в начале. Ось y-ов в точках: (0,0) и (1,0)
4 Вершины	$y' = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}, \quad e^{\frac{1}{x}} = 0$ Т к последнее у-ние ни какими конечными значениями x-са не удовлетворяется, то вершин у кривой нет
5 Точки перегиба	Нет
6 Ассимптоты	Ассимптота параллельная оси x-ов $y = \dfrac{1}{2}$ Наклонных ассимптот нет
7 Особые точки	Точки (0,0) и (0,1) являются для кривой точками прекращения Точка (0,0) является точкой разрыва 1-го рода

Смотрите черт 723.

37. Формуляр кривой: $y = x \sin x$.

1 Симметрия	Относительно оси y-ов
2 Интервал изменения переменных	x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$; y: ∞ … 0 … ∞
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках $0, \pi, 2\pi \ldots k\pi$ и $0, -\pi, -2\pi \ldots -k\pi$ } где $k=0,1,2,\ldots$ Ось y-ов только в начале
4. Вершины	$y' = x\cos x + \sin x$; $x\cos x + \sin x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -x$ Ур-ние $\operatorname{tg} x = -x$ решим графически, рассматривая корня его, как абсциссы точек пересечения кривой $y=\operatorname{tg} x$ и прямой $y = -x$. Из черт 274 видно, что все корни заключены в промежутке от $\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ до $\pm(k+1)\pi$, при этом четным значениям k будут соответствовать вершины y_{min}, а нечетным — y_{max}., в чем легко убедиться исследуя знак y''. Наибольший экстремум равен бесконечности
5 Точки перегиба	$y'' = -x\sin x + 2\cos x \quad -x\sin x + 2\cos x = 0$ или $\operatorname{ctg} x = \frac{x}{2}$ Из черт 275 видно, что все корни ур-ния $\operatorname{ctg} x = \frac{x}{2}$, заключены в промежутке от $\pm k\pi$ до $\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k = 0, 1, 2$
6 Ассимптоты	Нет
7 Особые точки	Нет.

Сиотрите черт 276

38. Формуляр кривой: $y = \frac{\sin x}{x}$

1. Симметрия	Относительно оси y-ов
2 Интервал изменения переменных	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках, где $x = \pm k\pi$ Ось y-ов в точке (0,1)
4 Вершины	$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x}$, $x\cos x - \sin x = 0$ или $\operatorname{tg} x = x$ Корнями y-ия $\operatorname{tg} x = x$ являются абсциссы точек пересечения кривой $y = \operatorname{tg} x$ с прямой $y = x$ Все корни заключены в промежутках от $\pm k\pi$ до $\pm (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k = 0, 1, 2$ Т к при $x \to \infty$ $y \to 0$, то ординаты вершин кривой будут убывать по мере удаления от начала Наибольшая ордината кривой, совпадающая с осью y-ов, равна единице, наименьшая — равна нулю. См черт 277
5 Точки перегиба	$y'' = \frac{-x^2\sin x - x\cos x + \sin x}{x^2}$, $(1+x^2)\sin x - x\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = \frac{x}{1-x^2}$. Корни этого уравнения, соответствующие абсциссы точек перегиба, найдутся, как абсциссы точек пересечения кривых $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{x}{1-x^2}$
6 Ассимптоты	Т к при $x \to \infty$ $y \to 0$, то ось x-ов является для данной кривой ассимптотой, которую она пересекает бесконечное число раз
7 Особые точки	Нет

Смотрите черт 278

39. Формуляр кривой: $y = \sin \frac{1}{x}$

1 Симметрия	Т к изменение знака у абсциссы влечет изменение знака у ординаты, не меняя абсолютной величины ее, то кривая обладает симметрией относительно начала
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline y & 0 & ? & 0 \end{array}$ При $x_1 = 0$ y имеет неопределенную величину
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках, где $\frac{1}{x} = \pm k\pi$ или $x = \frac{1}{\pm 2k\pi}$, где $k = 0, 1, 2$ Ось y-ов не пересекает При возрастании k и, след-но, при $x \to 0$, пересечения с осью x становятся все более и более частыми
4 Вершины	$y' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$, $\cos\frac{1}{x} = 0$; $x = \pm\frac{2}{(2k+1)\pi}$ Итак вершины кривой в точках $\left(\pm\frac{2}{(2k+1)\pi}, \sin\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$, при этом не трудно показать, исследуя знак y'', что при $x_1 = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ и $x_2 = -\frac{2}{(4k+3)\pi}$, имеем верш $y_{max} = 1$, а при $x_3 = -\frac{2}{(4k+1)\pi}$ и $x_8 = \frac{2}{(4k+3)\pi}$ — верш $y_{min} = -1$ Все вершины y_{max} лежат на прямой $y = 1$, а вершины y_{min} — на прямой $y = -1$ Число вершин кривой неограниченно велико, но все они лежат в ограниченном интервале $-\frac{2}{\pi} < x < +\frac{2}{\pi}$, при этом, чем ближе к значению x равному нулю, тем чаще и чаще вершины max сменяются вершинами min При $x = 0$ y' — неопред. вид, след-но начало — особая точка
5 Точки перегиба	Точки перегиба можно найти, решая графически у-ние $\operatorname{tg}\frac{1}{x} = 2x$
6 Ассимптоты	Т. к при $x \to \infty$, $y \to 0$, то ось x-ов является ассимптотой
7 Особые точки	Точки $(0, \pm 1)$ являются для данной кривой особыми точками, в которых кривая имеет бесконечное множество вершин

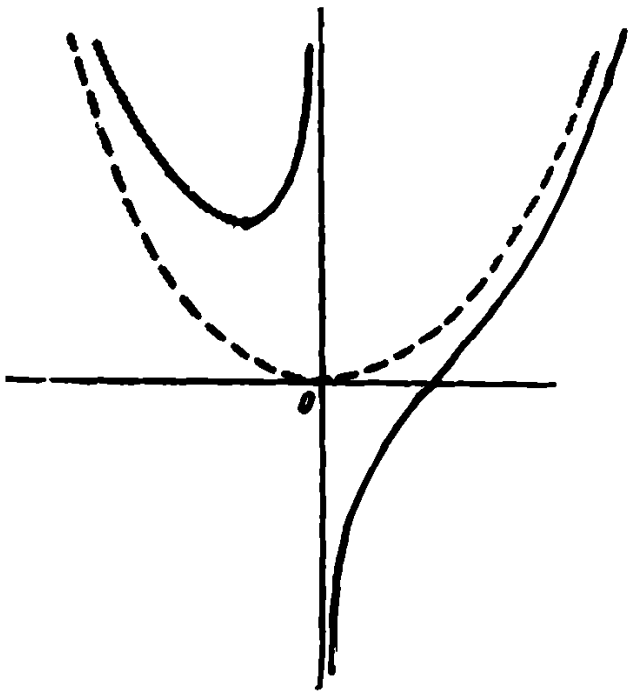
Смотрите черт 279

48. Формуляр кривой: $y = x \sin \frac{1}{x}$

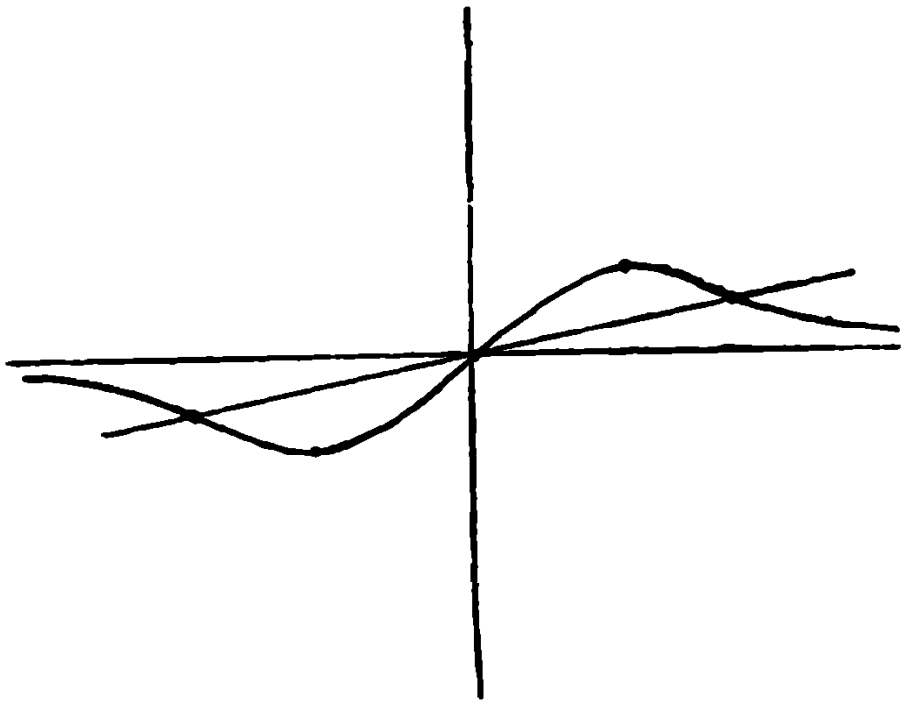
1 Симметрия	Относительно оси y-ов
2 Интервал изменения переменных	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$ $\lim y = \lim x \sin \frac{1}{x} = \lim \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \left\| x \to \infty \right.$
3 Пересечение с осями	Ось x-ов в точках, где $x = \frac{1}{\pm k\pi}$ где $k = 0, 1, 2$ Ось y-ов только в начале Крайние точки пересечения с осью x-ов имеют абсциссы $\pm \frac{1}{\pi}$ Вблизи начала число точек пересечения бесконечно велико
4 Вершины	$y' = -\frac{\cos \frac{1}{x}}{x} + \sin \frac{1}{x}$, $-\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} = 0$ или $\operatorname{ctg} \frac{1}{x} = x$ Последнее у-ние решаем трафически Из черт 280 следует, что корни у-ния лежат в промежутках от $\frac{1}{k\pi}$ до $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ и от $-\frac{1}{k\pi}$ до $-\frac{2}{(2k+1)\pi}$, где k=0,1,2 При этом нечетным значениям k будут соответствовать вершины y_{min}, а четным—верш y_{max} Все бесконечное множество вершин заключено в интервале $-\frac{2}{\pi} < x < +\frac{2}{\pi}$, причем при $x \to 0$ ординаты вершин стремятся к нулю При $x = 0$ y' — величина неопределенная, т о в начале кривая имеет особую точку
5 Точки перегиба	$y' = -\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^3}$, $\sin \frac{1}{x} = 0$; $x = +\pm \frac{1}{k\pi}$, где k=0,1,2 Т о кривая имеет бесконечное множество точек перегиба, причем они оказываются точками пересечения кривой с осью x-ов.
6 Ассимптоты	Прямая $y = 1$ является ассимптотой
7 Особые точки	В начале коорд-т кривая имеет особую точку, в которой она бесконечное множество раз пересекает ось x-ов, имеет бесконечное множество вершин и бесконечное множество точек перегиба

Смотрите черт 281

ЧЕРТЕЖИ К ГЛАВЕ 2-ОЙ „ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ“.

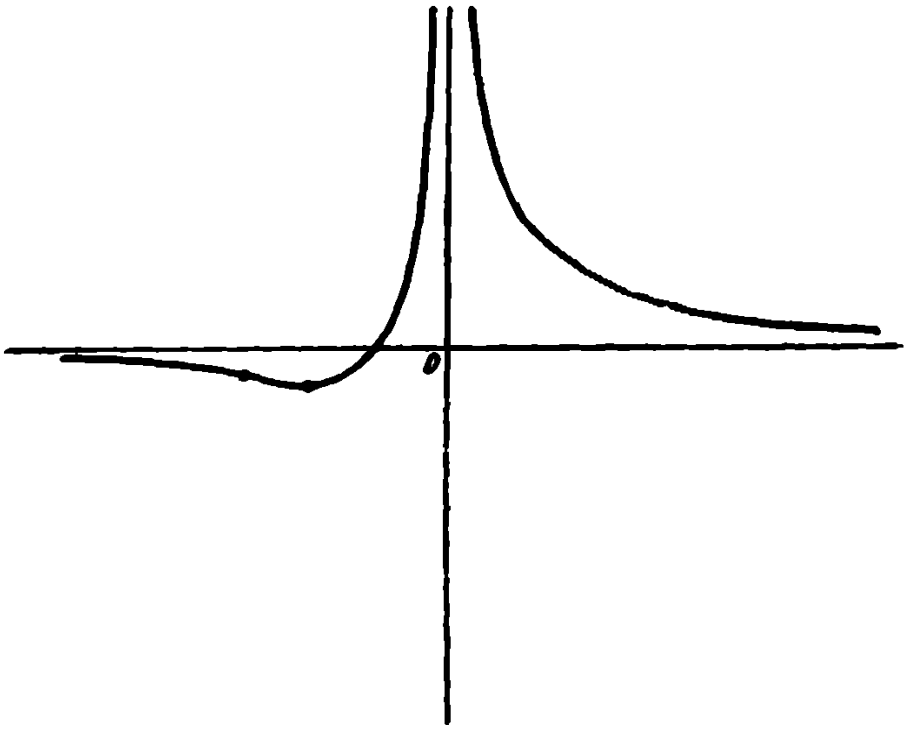


Черт. 238

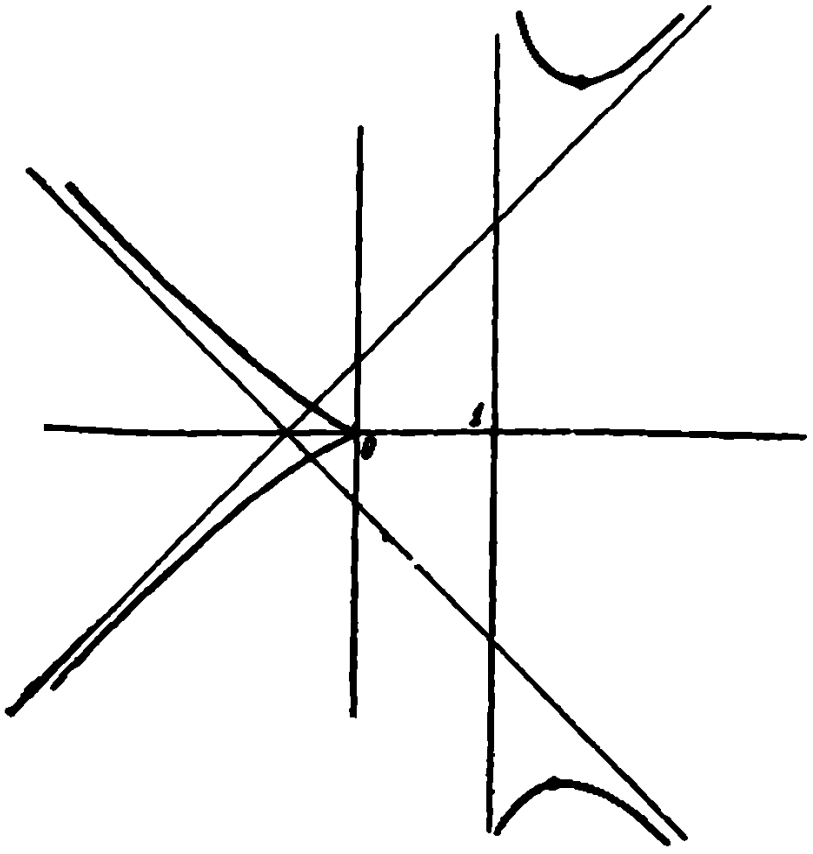


Черт 239.

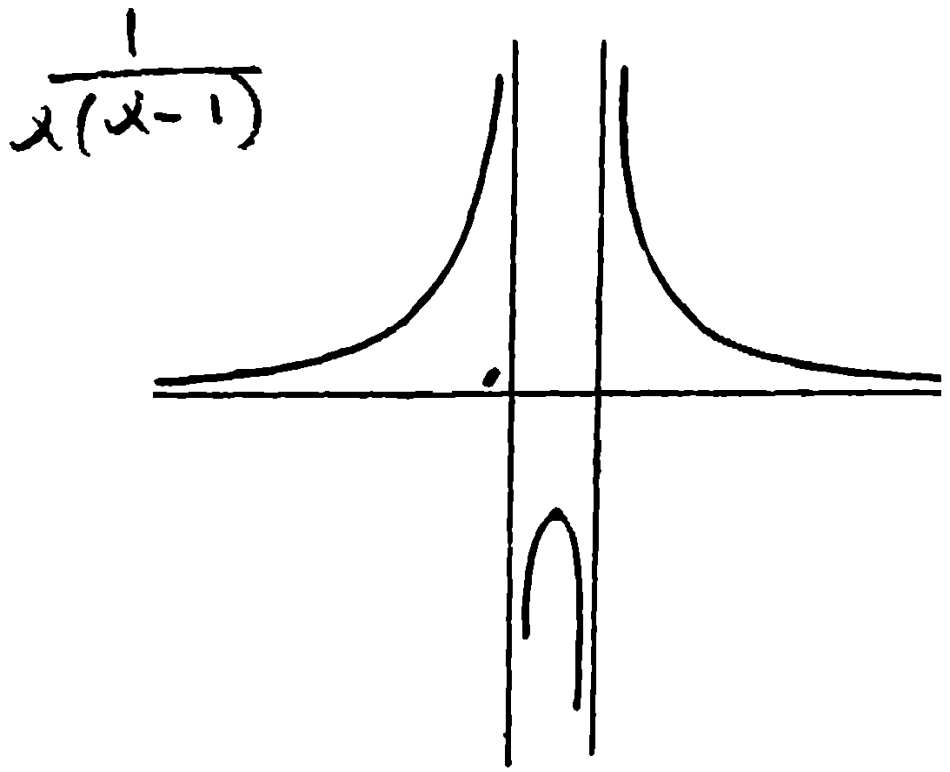
Чертежи к главе 2-ой: „Исследование алгебраических кривых".



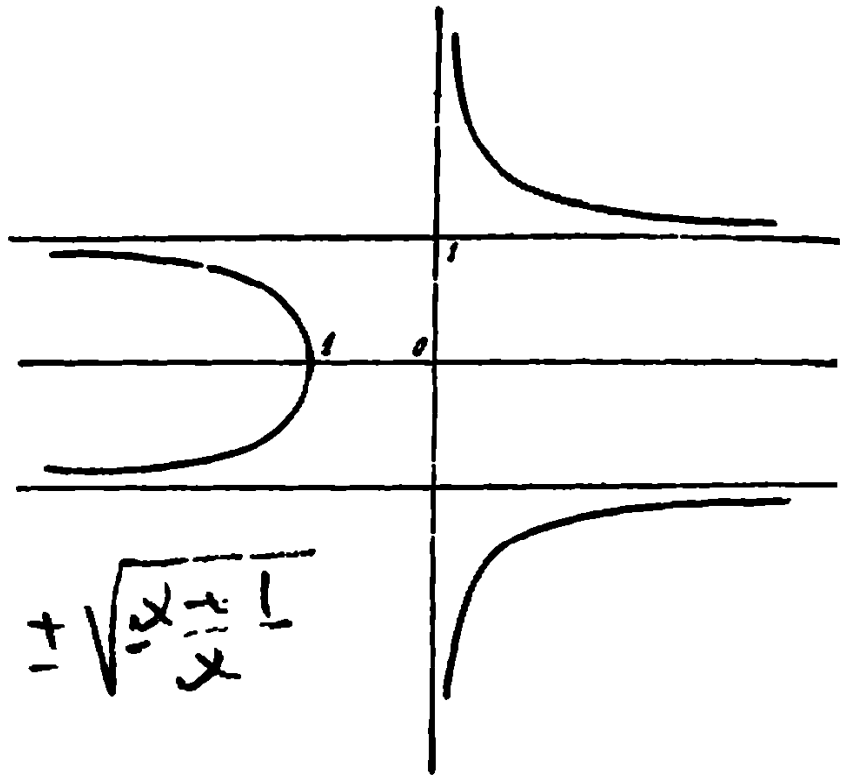
Черт 240



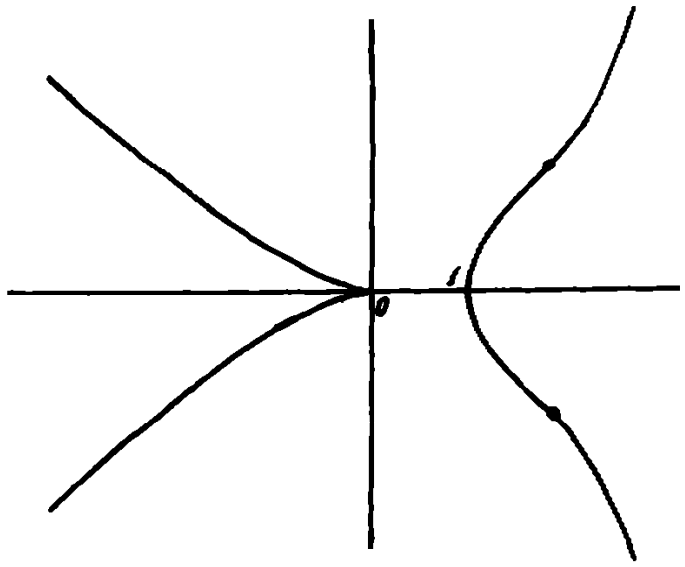
Черт 241



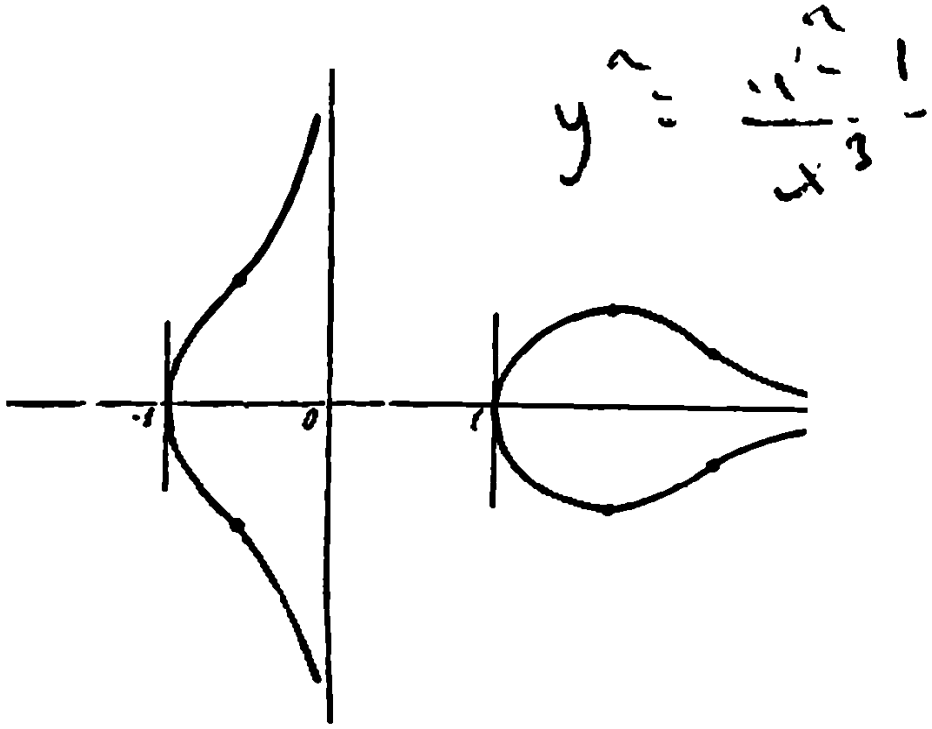
Черт 242



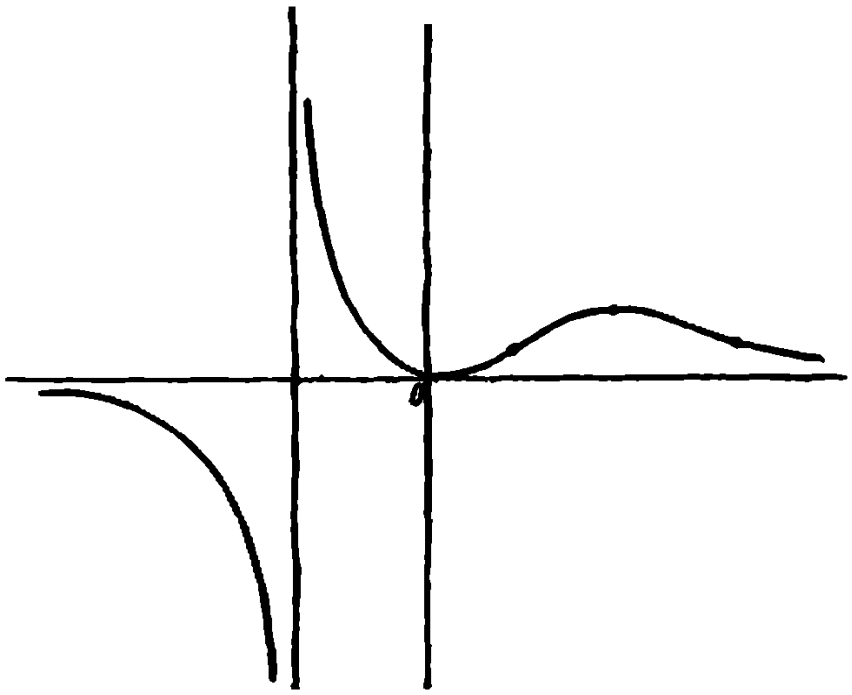
Черт 243.



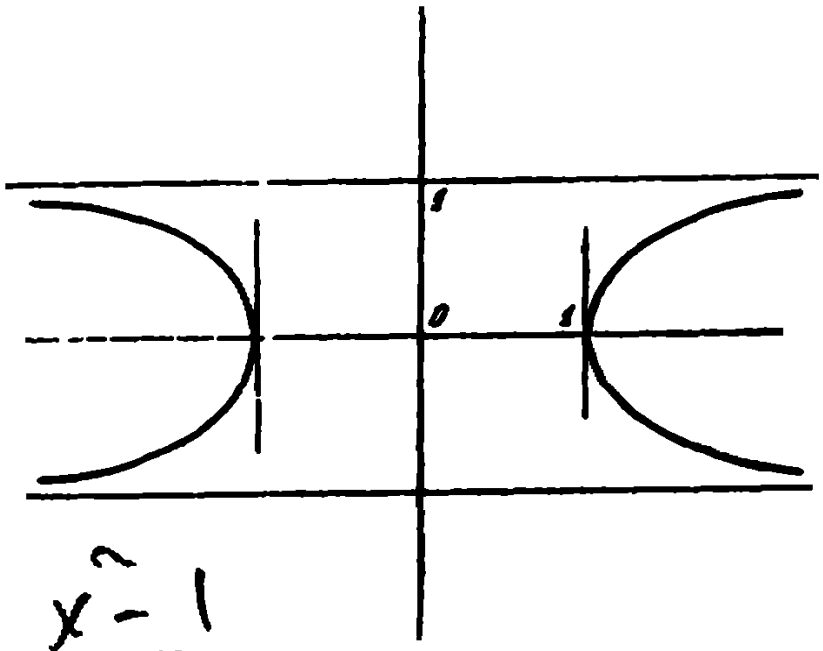
Черт 244



Черт 245

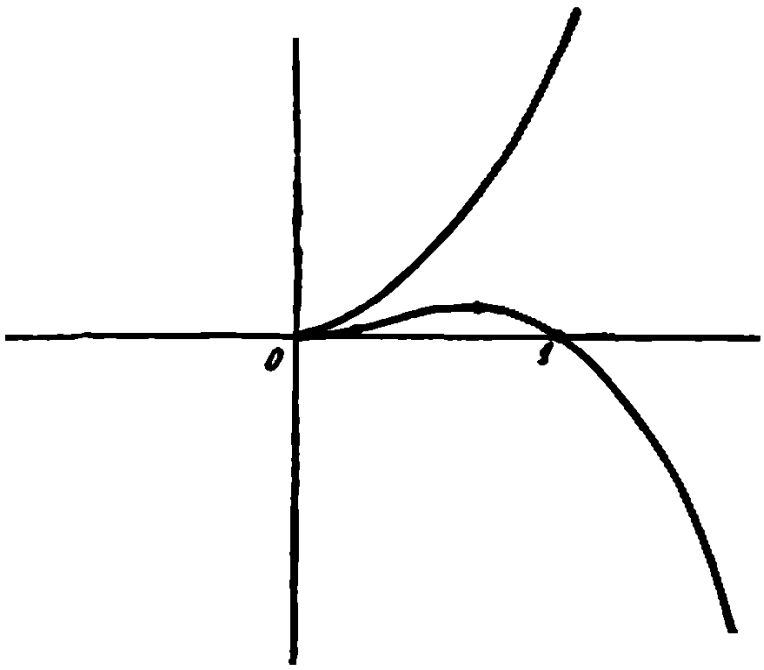


Черт. 246

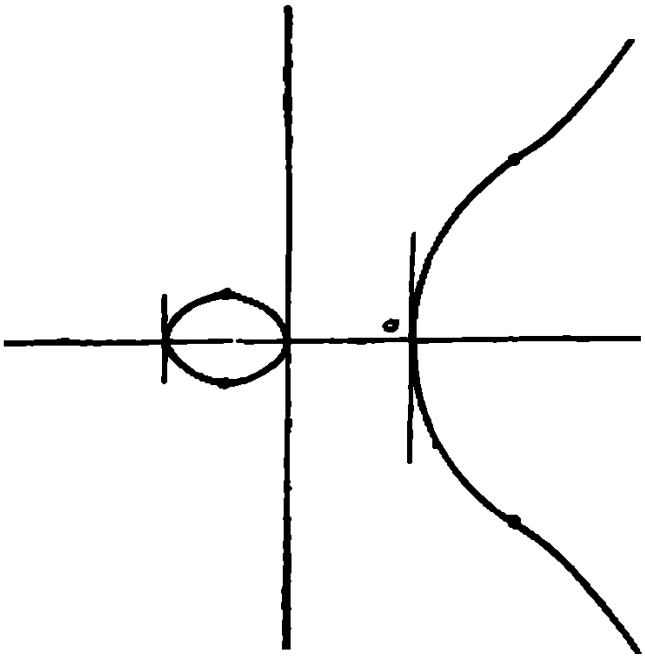


$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Черт 247

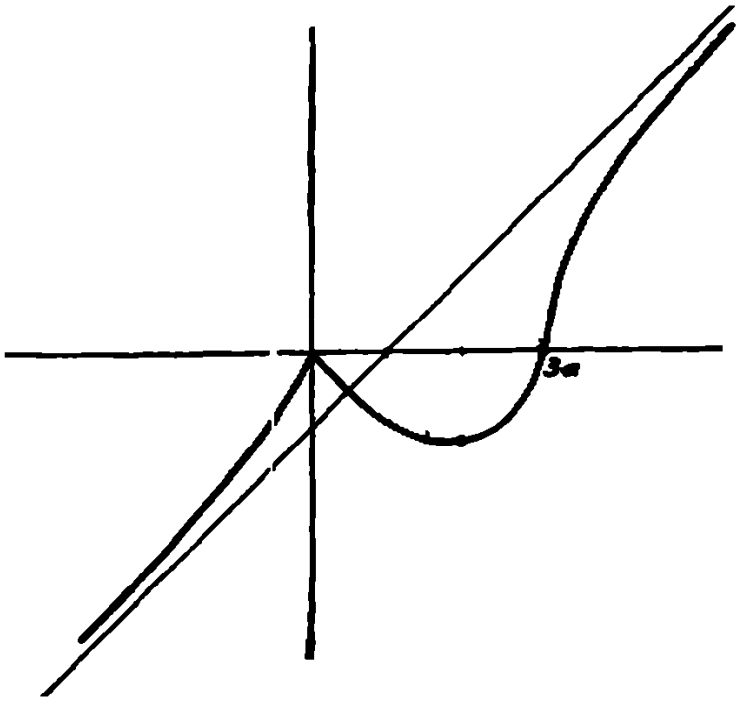


Черт 248.

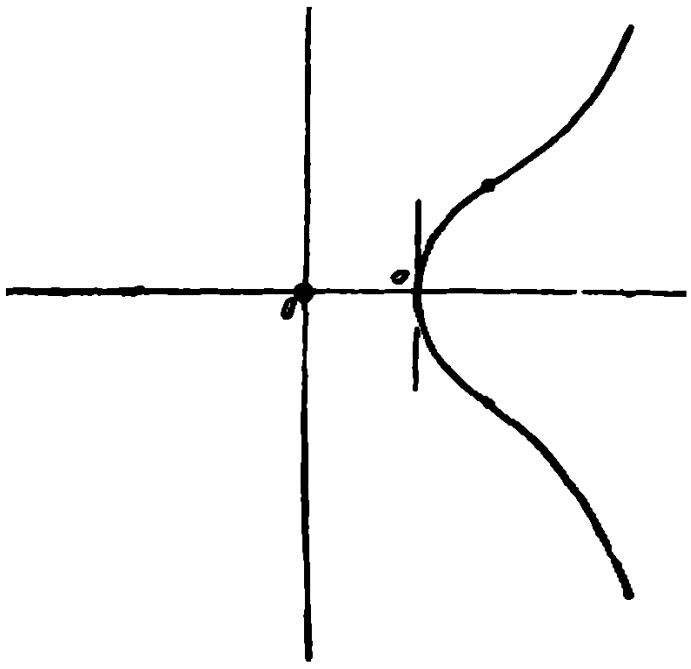


Черт. 249

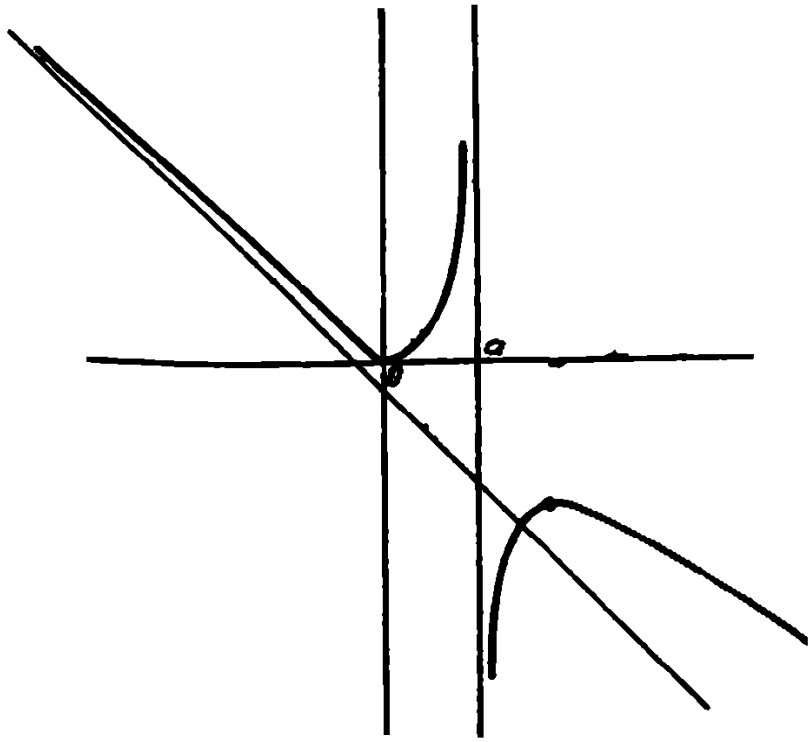
Чертежи к главе 2-ой: „Исследование алгебраических кривых".



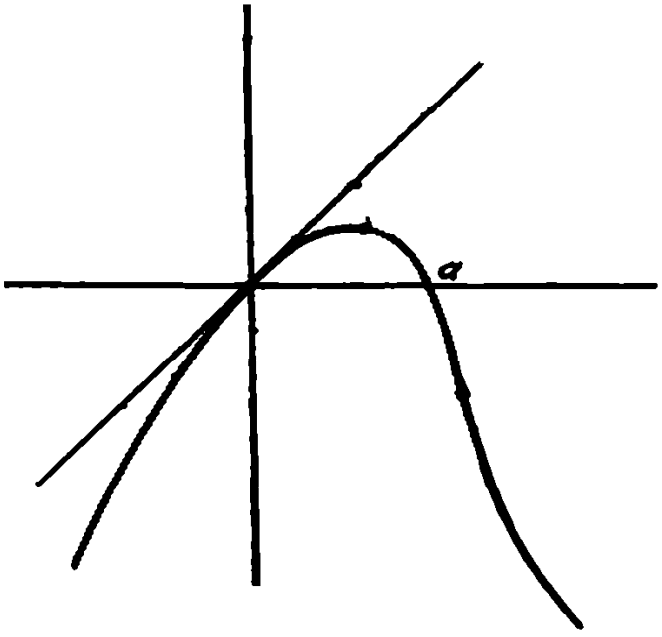
Черт. 250



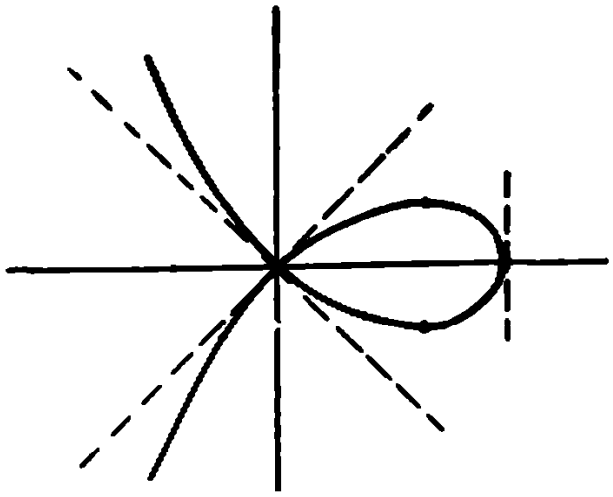
Черт. 251



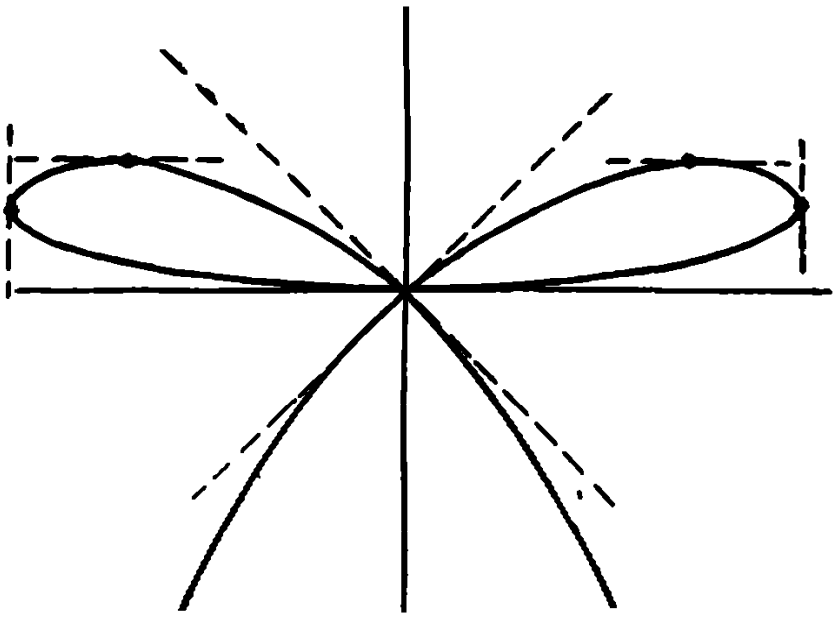
Черт 252



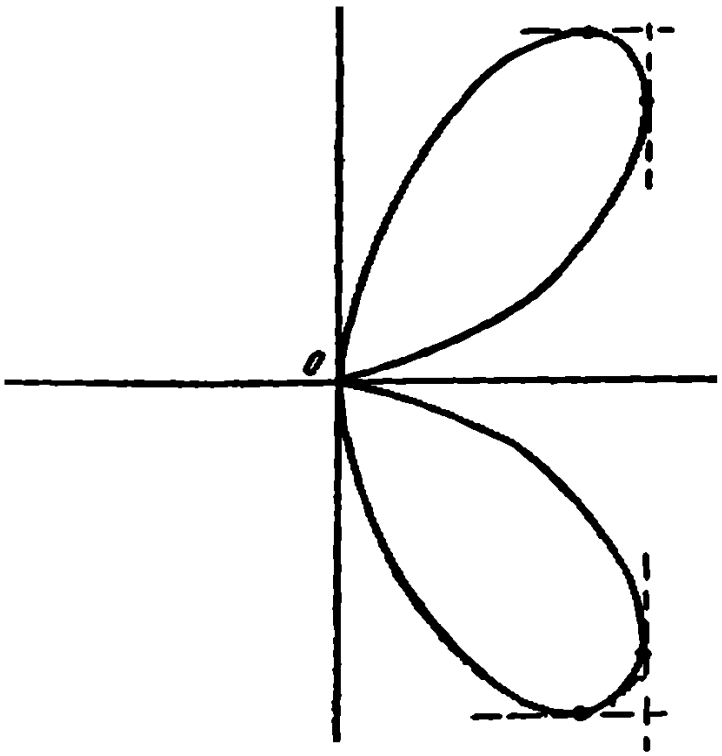
Черт. 253.



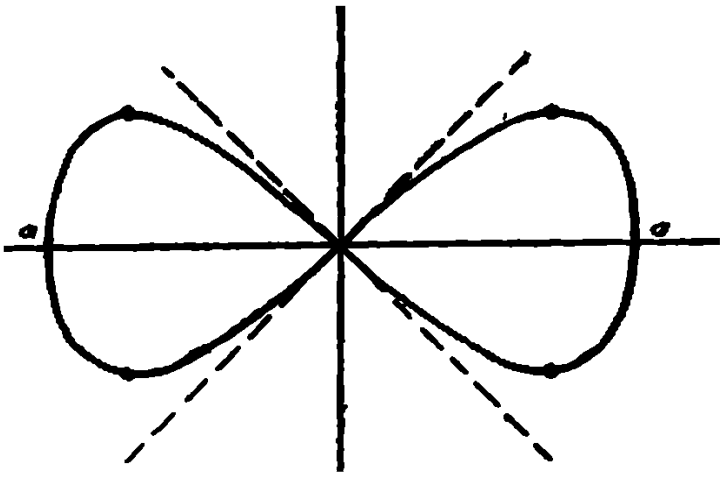
Черт. 254.



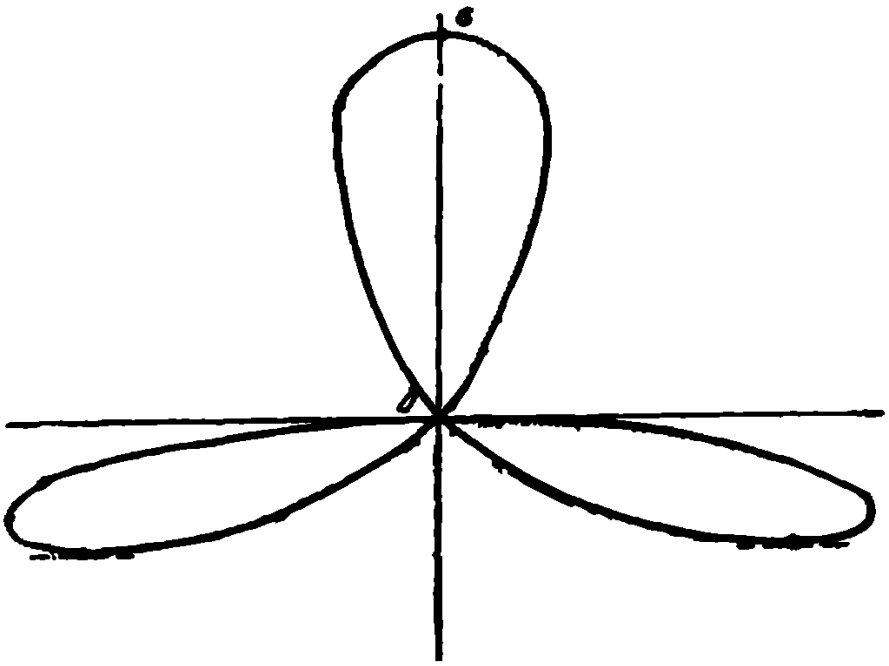
Черт. 255.



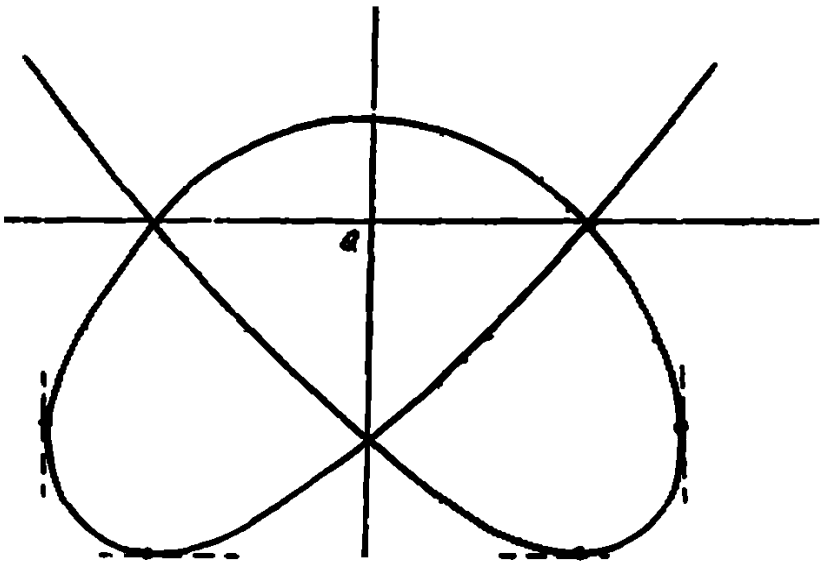
Черт 256



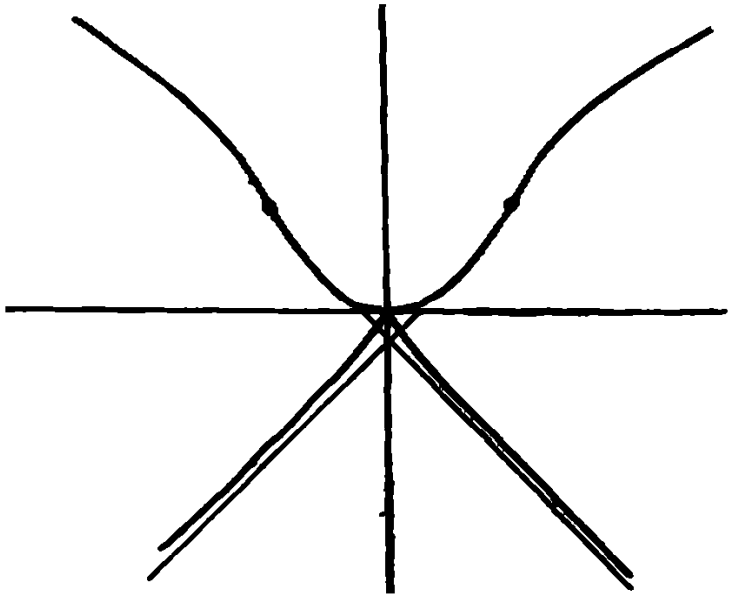
Черт 257



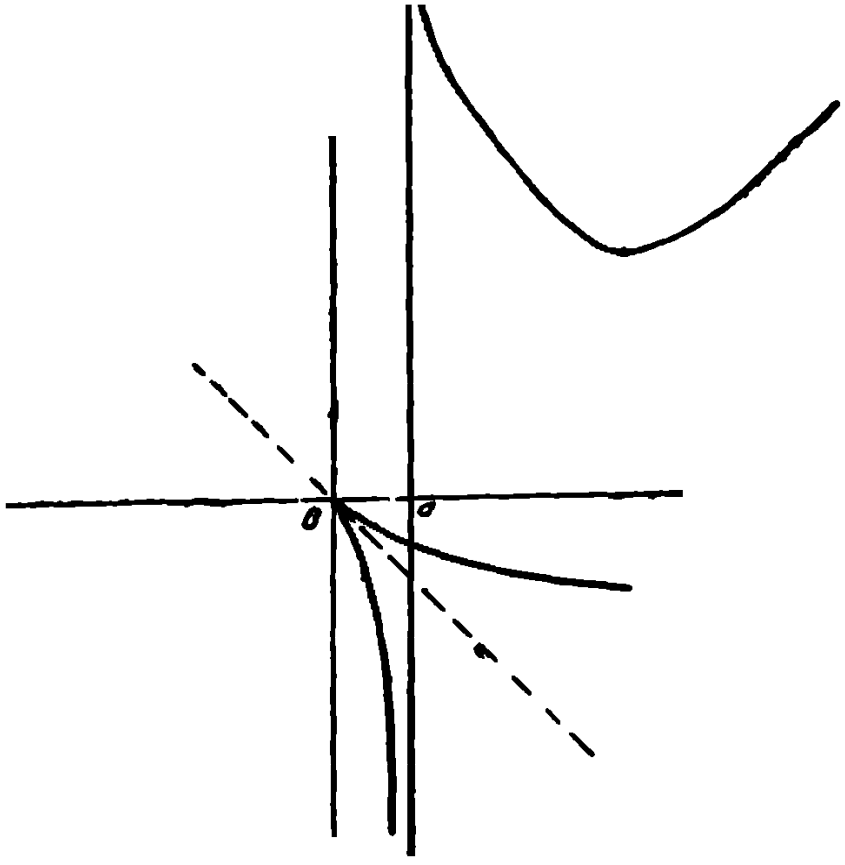
Черт 258.



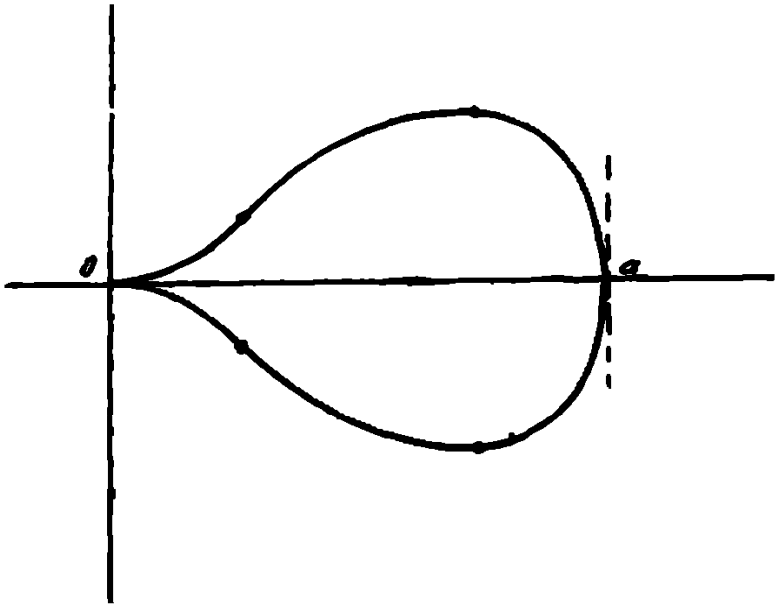
Черт. 259.



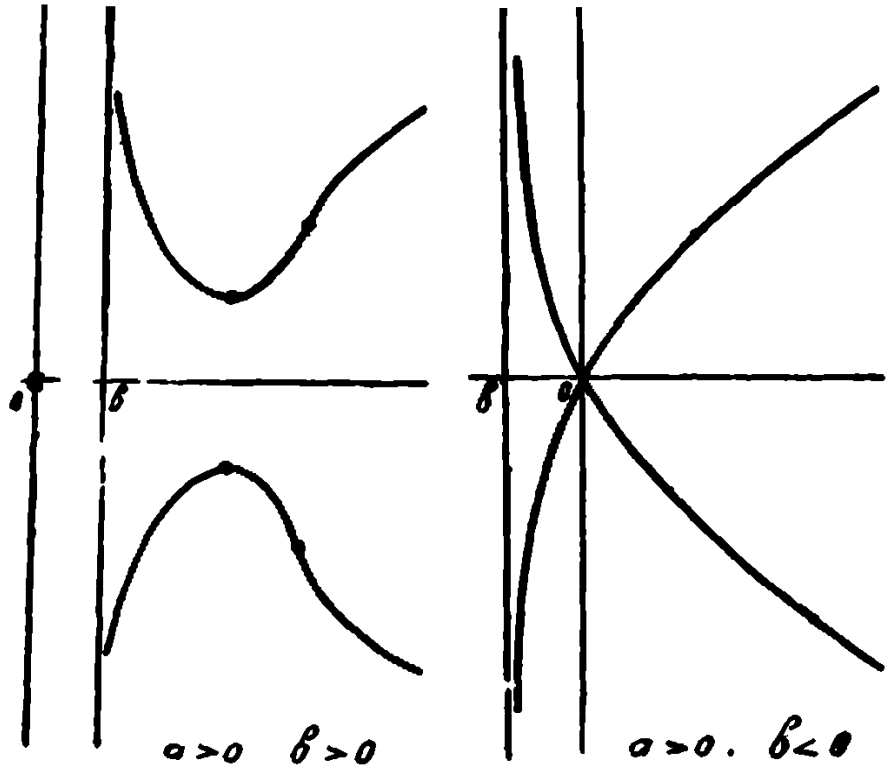
Черт 260



Черт. 261.

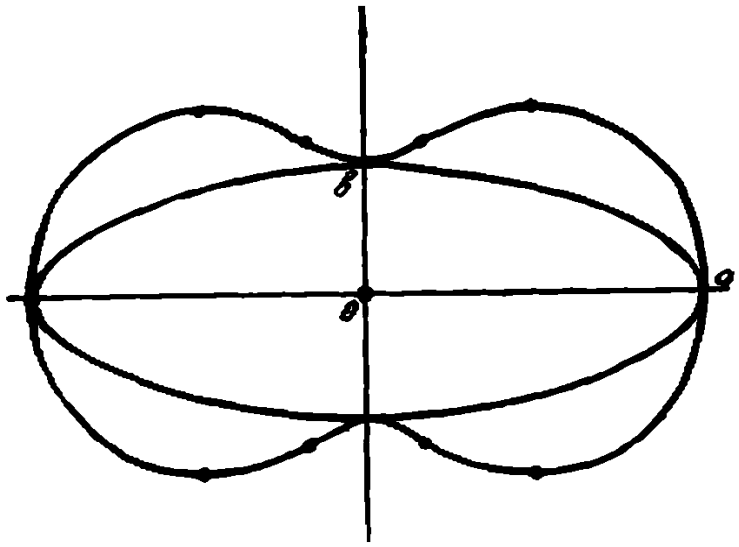


Черт. 262

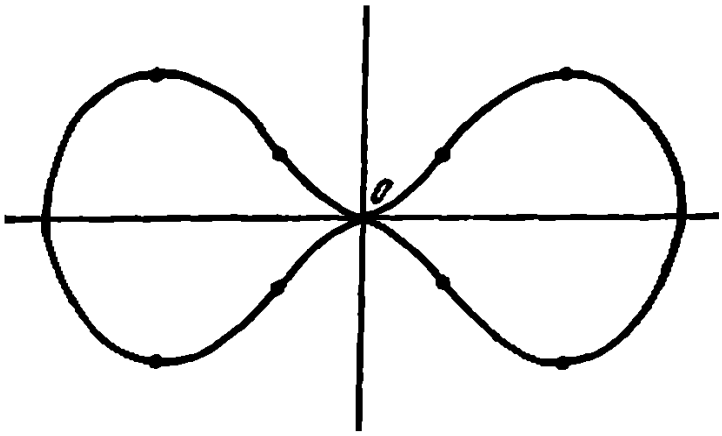


Черт 263

Чертежи к главе 2-ой „Исследование алгебраических кривых".

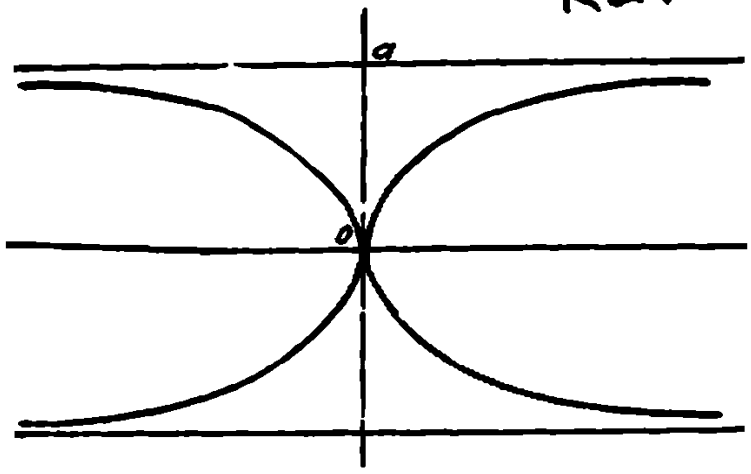


Черт 264



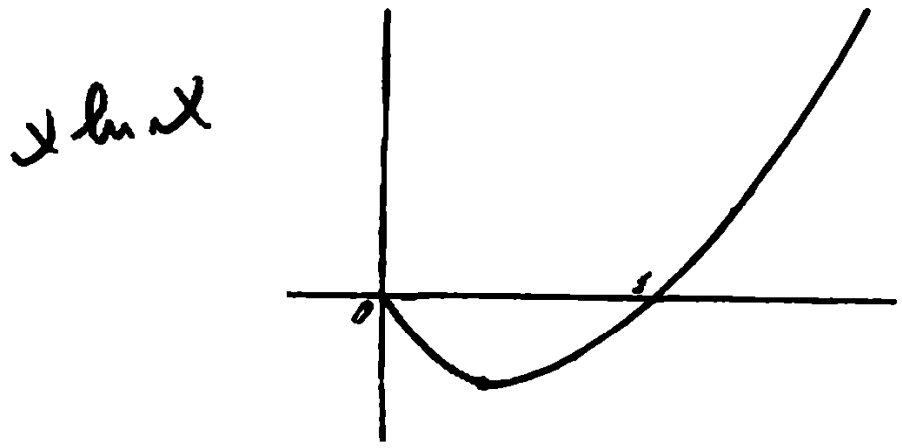
Черт 265

Капка

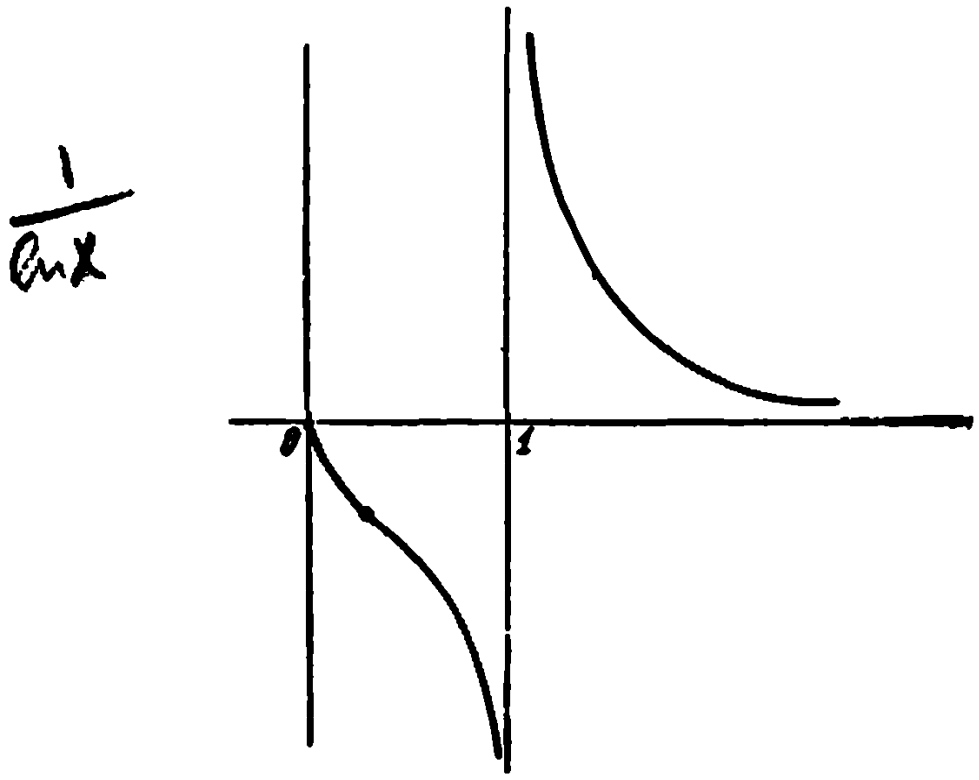


Черт 266

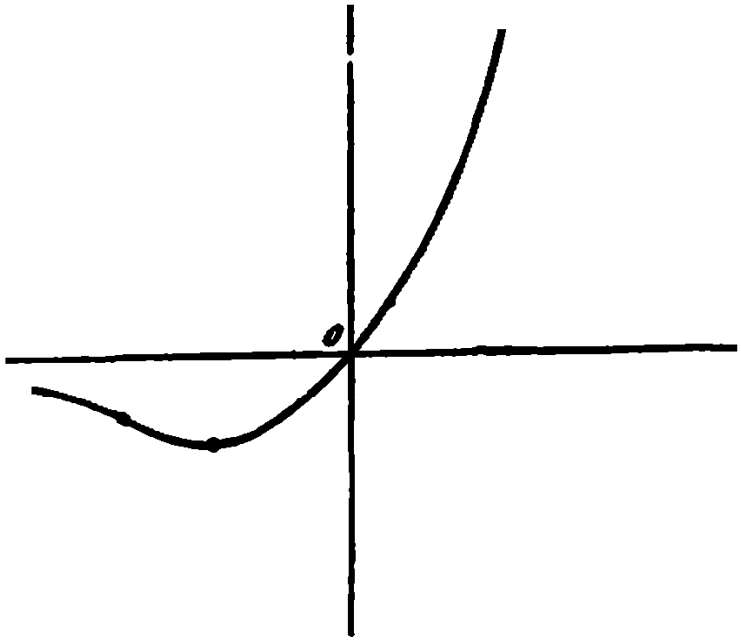
ЧЕРТЕЖИ К ГЛАВЕ 3-ЕЙ „ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КРИВЫХ".



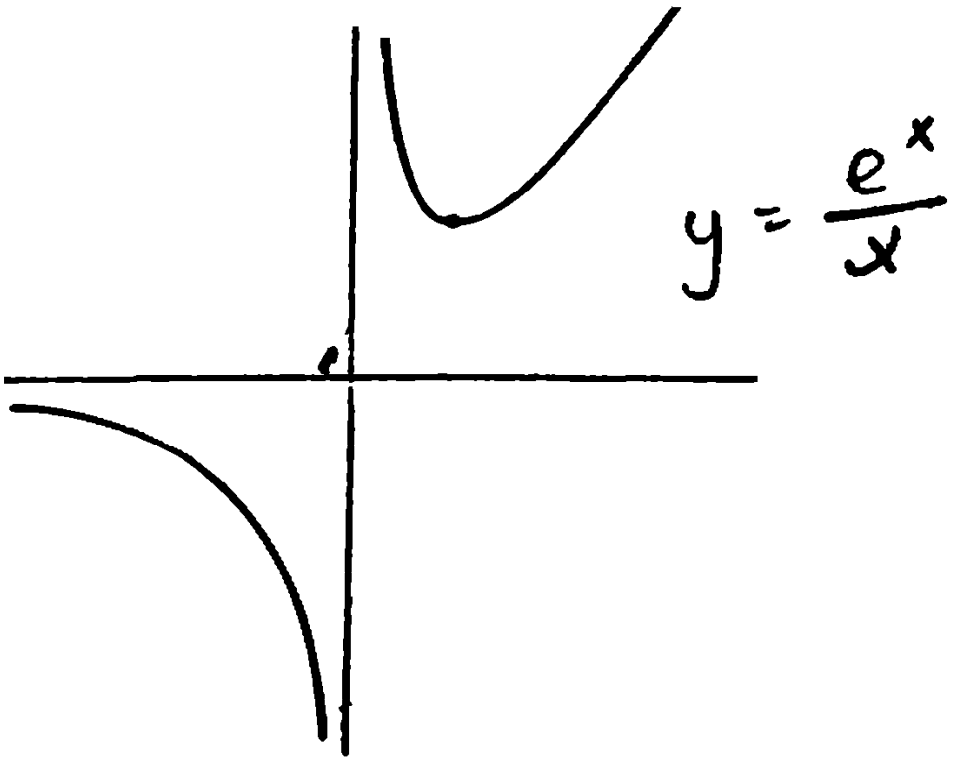
Черт 267.



Черт 268

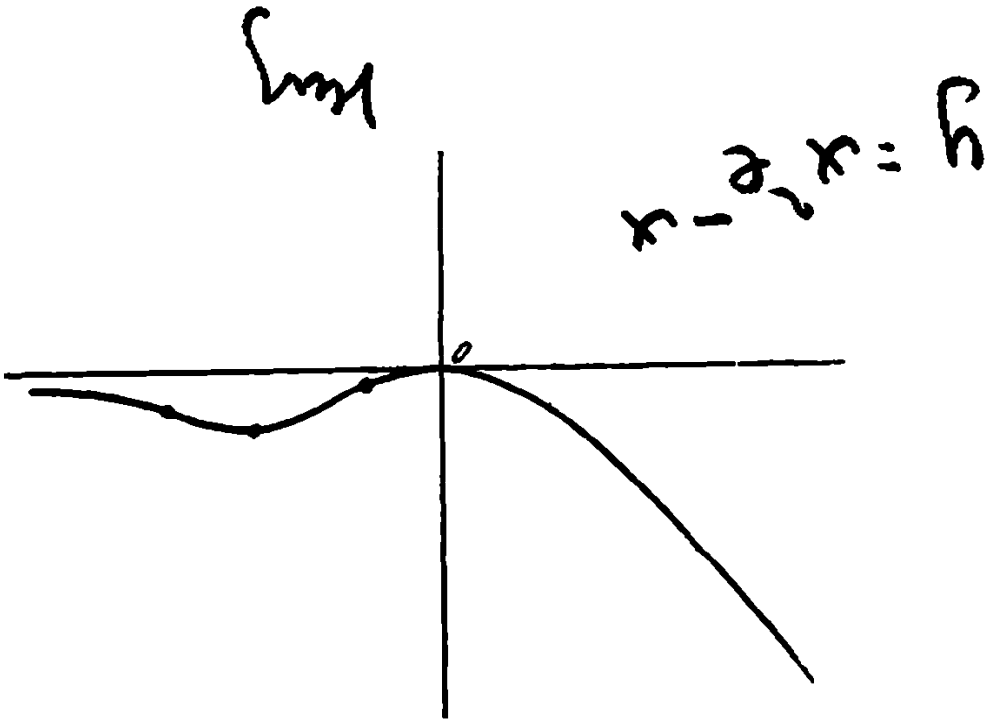


Черт 269

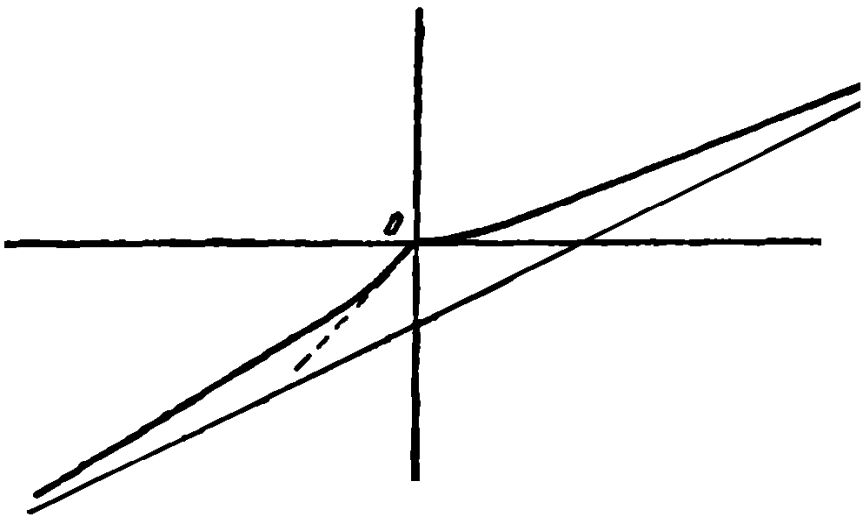


Черт. 270.

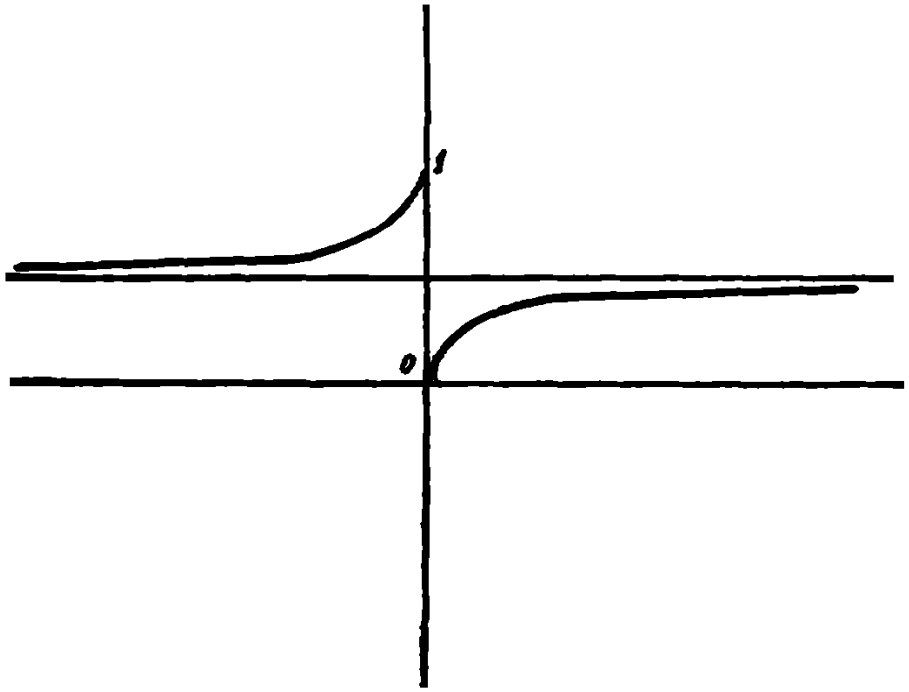
Чертежи и [illegible] 3-ей: „Исследование трансцендентных кривых".



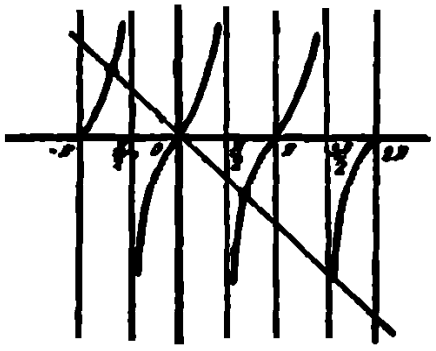
Черт. 271.



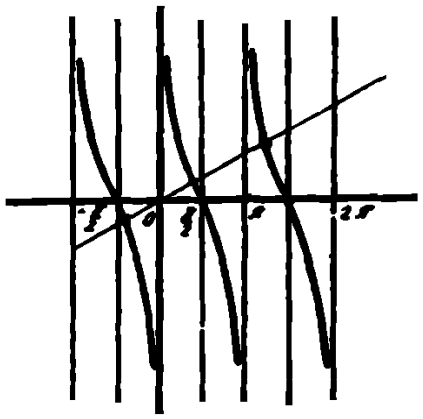
Черт. 272.



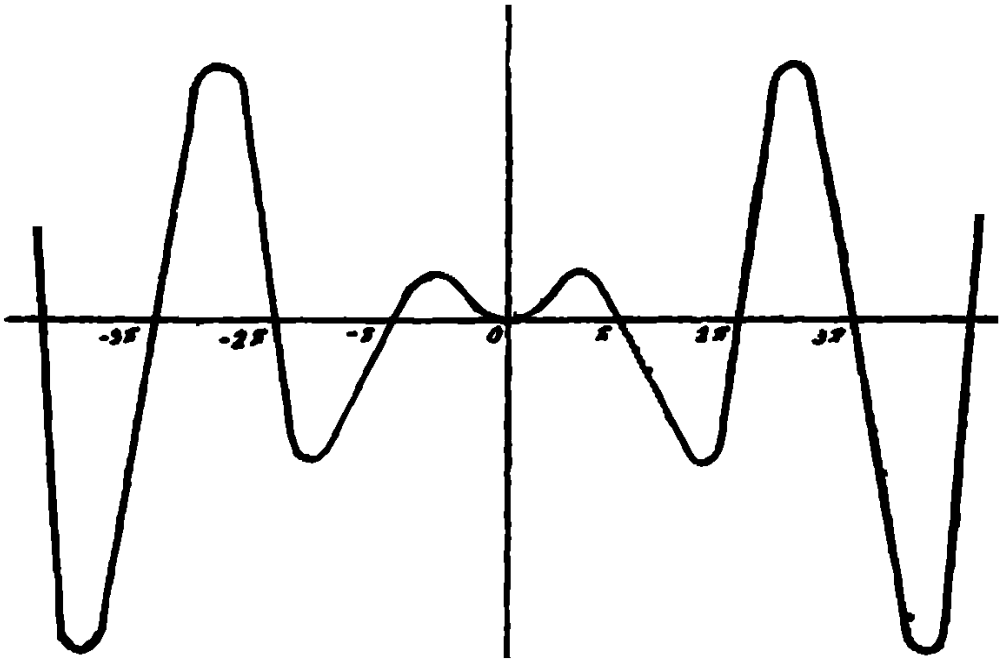
Черт. 273



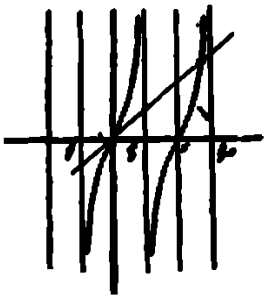
Черт 274.



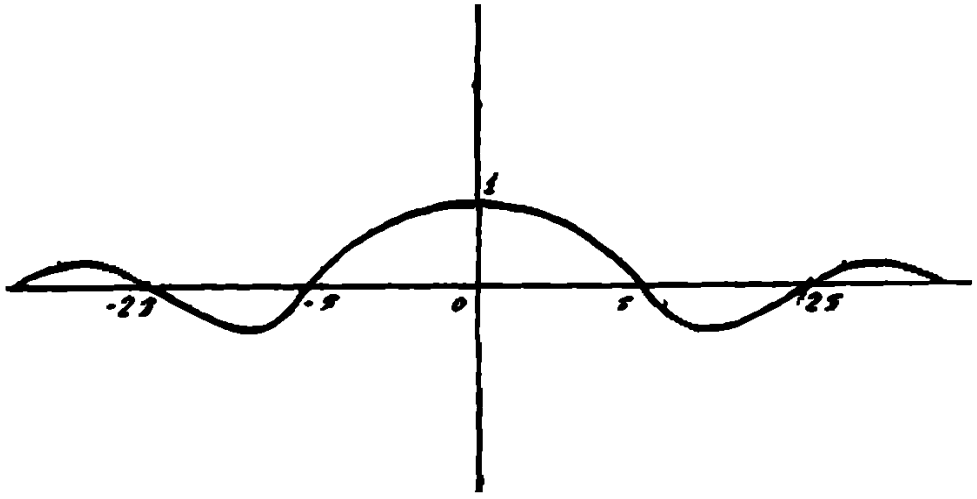
Черт 275.



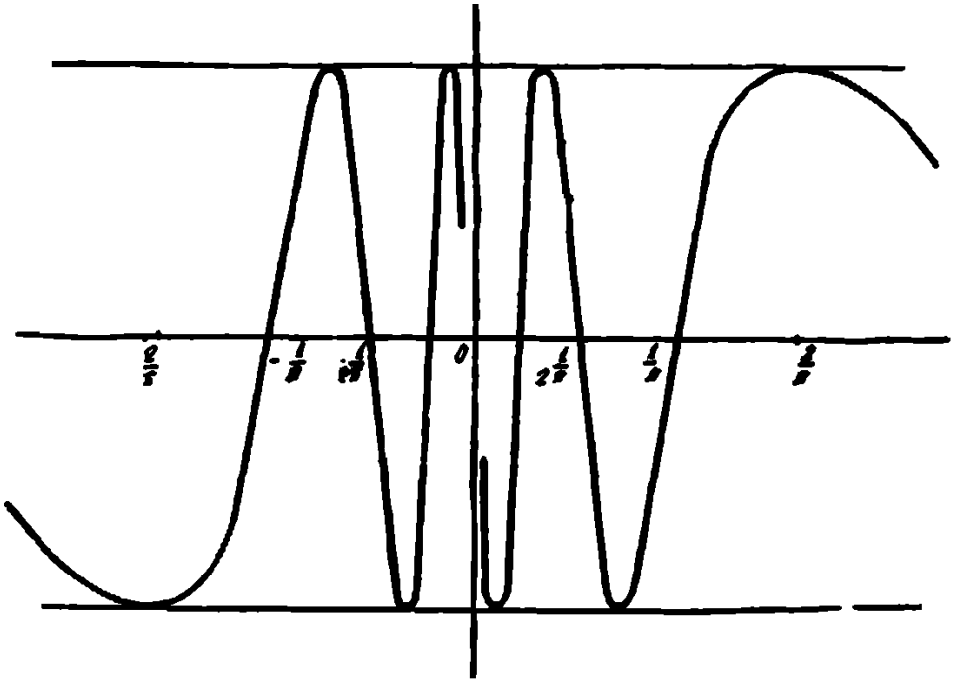
Черт 276.



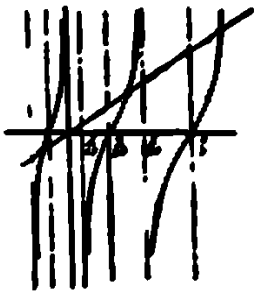
Черт. 277



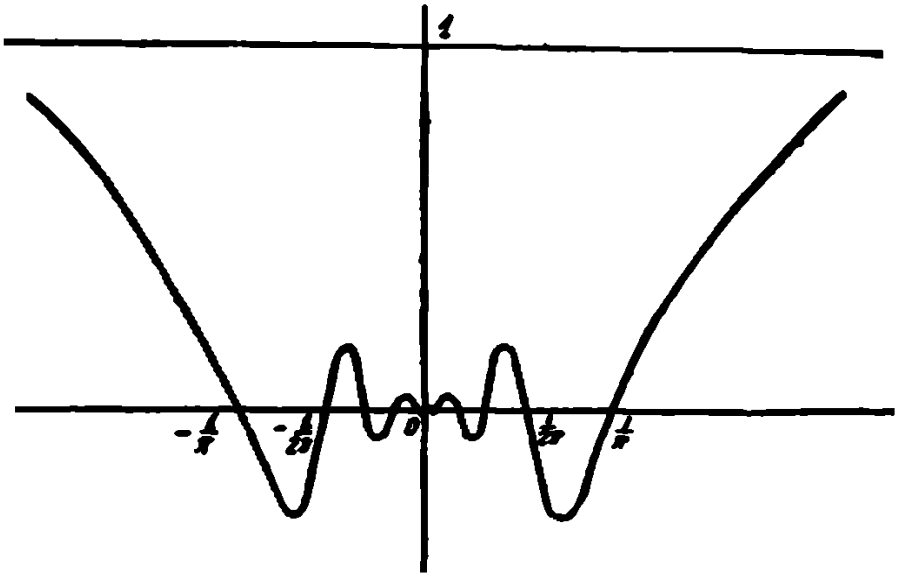
Черт. 278.



Черт 279



Черт 280



Черт 281

Список основных литературных источников, которыми пользовался автор при составлении книги.

Адлер А. Теория геометрических построений.

Адамов А. А. Высшая математика 1912.

Головин Д. Н. Графическая математика 1931.

Граве Д. А. Курс аналитической геометрии. 1893.

Диктельдей Ф. Сборник упражнений и практических задач по диф. и интегр исчисл. Ч. 1 и 2. 1933.

Дзюбек О. Курс аналитической геометрии. 1911.

Дуббель Г. Справочник по математике. 1933.

Егоров Д. Ф. Дифференциальная геометрия 1923.

Извеков Б. И Сборник задач по прикладной математике. 1932.

Иванов. Приложение диф исчисления к геометрии.

Лоренц Г Элементы высшей математики.

Ляпин Л. К Курс теории вероятностей. 1924.

Леденсон Л. Б. Кинематика механизмов. 1932.

Млодзеевский Б К. Основы анатомической геометрии. 1923

Польшау А. Н. Начала начертательной геометрии.

Поморский Ю Л. Вариационная статистика. 1930.

Смирнов В И. Курс высшей математики. 1931.

Самов. Курс аналитической геометрии

Столяров Я. В. Теория механизмов. 1926.

Цейтен Г. Г. История математики. Ч. 1 и 2. 1933.

Филтенгольц Г. М. Математика для инженеров.

Фрай Т. Элементарный курс дифференциальных уравнений. 1933.

Шифф В. Сборник задач и упражнений по диф. и интегр. исчислениям 1915.

Ebner F. Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. 1906.

Wieleitner H. Spezielle ebene Kurven. 1908.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр

Предисловие 1

Введение 3

Классификация кривых (5). Алгебраические кривые (5). Алгебраические кривые, соответствующие частным видам ур-ний (9). Историческая справка (10)

Часть 1-ая 13

1. Конические сечения 15

Эллипс. Вывод у-ния (17). Основные элементы эллипса (18). Параметрическая форма у-ния эллипса (20). Радиус кривизны эллипса Построение центра кривизны (21) Свойства касательной и нормали (23) Эллипс как проекция круга (28) Сопряженные диаметры эллипса и их свойства (29) Длина дуги эллипса, площадь и т. п. (32). Способы построения эллипса (34). Образование эллипса механическим путем (6) Построение центра эллипса, его осей и касательной к нему (38). Применения эллипса (39).

Гипербола Вывод у-ния и исследование формы (47). Основные элементы гиперболы (48). Асимптоты гиперболы (49). Основные соотношения между величинами, характеризующими форму гиперболы (50) Параметрическая форма у-ний гиперболы (51). У-ние гиперболы, отнесенной к асимптотам (52). Свойства касательной и нормали (53) Сопряженные диаметры и их свойства (57) Способы построения гиперболы (60) Построение касательных к гиперболе (63) Равносторонняя гипербола (65) Применения гиперболы (68).

Парабола. Вывод у-ния и исследование формы (72). Основные элементы параболы (72). Свойства касательной к параболе (73) Радиус кривизны параболы Эволюта (76) Свойства нормалей параболы (77) Диаметры параболы (79). Площадь, длина дуги и т. п. (80) Способы построения параболы (84). Построение касательных к параболе (87) Построение оси и фокуса параболы (87). Парабола как график квадратного трехчлена (88) Применения параболы (89). Применения параболы в технике (95).

Общие уравнения кривых 2-го порядка 99

Кривые 2-го порядка как сечения конуса (99) Общее определение кривых 2-го порядка (99) Общее у-ние кривых 2-го порядка, отнесенных к вершине (100). Общее у-ние кривых 2-го порядка в полярной системе (102). Общее у-ние кривых 2-го порядка в декартовой системе (103) Общий способ построения кривых 2-го порядка (104) Софокусные кривые (105)

2 Гиперболические кривые 107

Исследование формы (109) Построение гиперболических кривых (110) Гиперболические кривые в технике (112)

3. Параболические кривые 113

Исследование формы (115) Свойства параболических кривых (117) Кубическая парабола (118) Общее у-ние кубической параболы и

ее форма (118). Применение кубической параболы к решению кубических у-ний (119) Полукубическая парабола (120). Полукубическая парабола как эволюта квадратичной параболы (121). Механическое свойство полукубической параболы (121) Построение параболических кривых (122).

4 Политропные кривые 127

У-ние и форма политроп (129) Построение политроп гиперболического типа (129) Построение политроп параболического типа (130). Общий способ построения политроп (131). Применение политропных кривых (131).

5 Циклические кривые 135

Циклоида. Вывод у-ния (137). Форма циклоиды (138) Геометрические свойства циклоиды (139). Эволюта циклоиды (141). Длина дуги циклоиды, площадь к т в (142) Построение циклоиды (144) Механические свойства циклоиды (144). Трохоиды (147). Эпициклоиды (149) Форма эпициклоид (150). Эпитрохоиды (151). Геометрические свойства эпициклоид (151) Длина эпициклоиды (154) Построение эпициклоид (154) Кардиоида (155) Свойства кардиоиды (156) Длина дуги кардиоиды, площадь ее к т в (158). Применение эпициклоид (159). Перициклоиды (160). Гипоциклоиды (162) Вывод у-ния (162) Форма гипоциклоиды (163). Гипотрохоиды (164). Эволюта гипоциклоиды (167). Свойства касательной к нормали (168). Построение гипоциклоиды (169) Астроида (169) Длина дуги астроиды, площадь к т в (171) Применение гипоциклоид (172)

Эвольвента круга Вывод у-ний (176) Свойства эвольвенты (178). Длина дуги эвольвенты и площадь сектора (180). Применение эвольвенты в технике (180) О связи между уравнениями циклических кривых (181)

6. Спирали 185

Спираль Архимеда. Вывод у-ния (187) Особенности формы (188). Геометрические свойства (189). Длина дуги и площадь сектора (191) Построение спирали Архимеда (193). Применение спиралей Архимеда (194)

Логарифмическая спираль Вывод у-ния (197). Геометрические свойства логарифмической спирали (201) Длина дуги и площадь сектора (208) Построение логарифмической спирали (209) Применение логарифмической спирали (211)

Гиперболическая спираль Исследование формы (214) Свойства гиперболической спирали (215) Построение гиперболической спирали (217)

Синусоидальные спирали (219) Геометрические свойства (220) Синусоидальные спирали, соответствующие целым значениям параметра (225)

Лемниската Бернулли (226) Геометрическое свойство лемнискаты (227) Построение лемнискаты графически и механическим путем (228) Площадь лемнискаты и длина дуги (232) Применение лемнискаты (234)

Спираль Корню (235). Исследование формы (236) Применение спирали Корню (237)

7. Различные кривые 249

Цепная линия Вывод у-ния (241) Форма цепной линии Свойства цепной линии (244) Применение цепной линии (249) Построение цепной линии (253)

Трактриса Вывод у-ния (254). Основное свойство трактрисы (257). Применение трактриссы (257) Длина дуги, площадь и т в. (258) Построение трактриссы (258).

Синусоидальные кривые (260) Форма синусоидальной кривой и смысл параметров ее уравнения (261). Действия над синусоидальными кривыми (262) Синусоида (266)

Кривая затухающих колебаний (267). Особенности формы (267). Механическое свойство кривой затухающих колебаний (271). Построение (272).

Циссоида Диоклеса (274). Исследование формы (275). Иной способ образования циссоиды (275). Длина дуги, площадь и т. п. (277). Применение циссоиды к решению задачи об удвоении куба (278). Циссоидальные кривые (278).

Конхоида Никомеда (280). Исследование формы (281). Конхоидальный циркуль (283). Трисекция угла с помощью конхоиды (284). Конхоидальные кривые (285).

Квадратриссе Динострата (286). Вывод у-ния (286). Построение (287). Деление угла и квадратура круга с помощью квадратрисы (287).

Улитка Паскаля (289). Вывод у-ния. Форма улитки (289). Трисекция угла с помощью улиток (291). Построение улиток (292). Применение улиток в технике (292) Длина улитки и площадь (293).

Декартов лист (294). У-ние Особенности формы (294). Свойства Декартова листа (297).

Строфоида (300) Вывод у-ния (300). Форма строфоиды (301) Свойства строфоиды (302).

Розы (305). Длина, дуги и площадь розы (307). Четырехлепестковая роза (308).

Кривые Ламе (310).

Показательная кривая (313). Исследование формы (313) Логарифмическая кривая (313). Построение показательной кривой (315).

Кривая Гаусса (317). Особенности формы (317). Применение кривой Гаусса (318) Прибор Гальтона (320).

Кривые Пирсона (322). Прибор Пирсона (324).

Овалы Кассини (326). Исследование формы (326). Овалы Кассини как эквипотенциальные линии (340)

Погонная линия (331). Вывод у-ния (331) Форма погонной линии (334).

8. Кривые движения точек шарнирных механизмов 337

Кривые, описываемые шарнирным антипараллелограмом (339). Кривые, описываемые точками шатуна (343). Аппарат Кемпбелля (346). Инверсор Поселье (347).

Часть 2-ая 351

1 Общая схема исследования кривой 353

Исследование кривой на симметрию (355) Определение интервала изменения переменных, входящих в у-ние кривой (356) Определение точек пересечения кривой с осями координат (357). Определение вершин кривой (357). Определение точек перегиба (359) Определение асимптот кривой (363). Определение особых точек кривой (363). Определение дополнительных точек (365).

2 Исследование алгебраических кривых 367

3. Исследование трансцендентных кривых 399

Список основных литературных источников 433